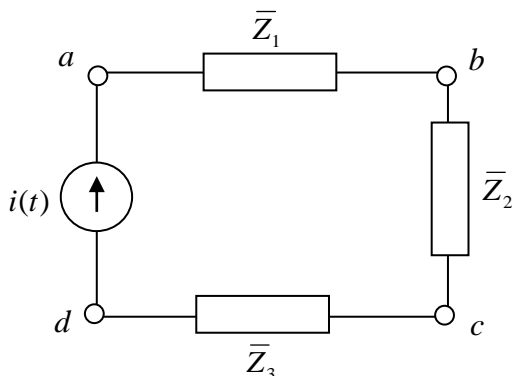


## 5. Naizmenične struje

**5.1.** U kolu prikazanom na slici 5.1.1. poznati su sledeći izrazi za napone u vremenskom domenu:



$$u_{ab} = 4\sqrt{2} [V] \sin(\omega t + 135^\circ)$$

$$u_{bc} = -4\sqrt{3} [V] \sin(\omega t + 60^\circ)$$

$$u_{cd} = 4 [V] \cos(\omega t - 150^\circ)$$

**Slika 5.1.1.**

- 1) Nacrtati fazorski dijagram napona  $\bar{U}_{ab}$ ,  $\bar{U}_{bc}$ ,  $\bar{U}_{cd}$ .
- 2) Naći fazor napona  $u_{ad}$  i izraz za  $u_{ad}$  u vremenskom domenu.
- 3) Ako je struja strujnog izvora  $i(t) = 2 \sin(\omega t + 165^\circ) [A]$  naći aktivnu snagu izvora.

### Rešenje:

1) Date trenutne vrednosti napona možemo da predstavimo fazorima (kompleksnim efektivnim vrednostima) na sledeći način: fazor (kompleksna efektivna vrednost) napona je kompleksan broj čiji je moduo efektivna vrednost napona a argument – početna faza napona.

Tako je:

za napon  $u_{ab} = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 135^\circ) [V]$  efektivna vrednost je  $4 V$  a početna faza je  $135^\circ$  pa

je fazor  $\bar{U}_{ab} = 4[V] \angle 135^\circ$ ,

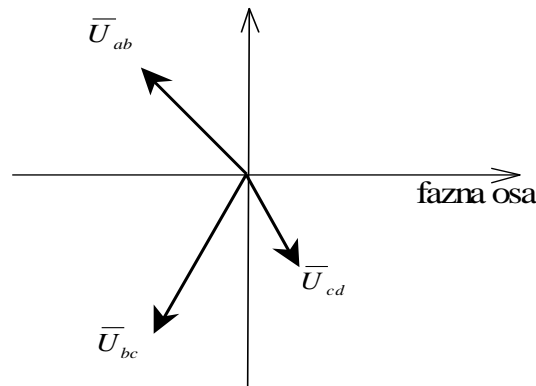
za napon  $u_{bc} = -4\sqrt{3} \sin(\omega t + 60^\circ) V = 4\sqrt{3} \sin(\omega t + 60^\circ - 180^\circ) V = 4\sqrt{3} \sin(\omega t - 120^\circ) [V]$

fazor je  $\bar{U}_{bc} = \frac{4\sqrt{3}V}{\sqrt{2}} \angle -120^\circ = \frac{4\sqrt{6}V}{2} \angle -120^\circ = 2\sqrt{6}[V] \angle -120^\circ$

a za napon  $u_{cd} = 4 \cos(\omega t - 150^\circ) V = \frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin(\omega t - 150^\circ + 90^\circ) V = 4 \sin(\omega t - 60^\circ) [V]$

fazor je  $\bar{U}_{cd} = \frac{4}{\sqrt{2}} V \angle -60^\circ = \frac{4\sqrt{2}}{2} V \angle -60^\circ = 2\sqrt{2} [V] \angle -60^\circ$ .

Fazorski dijagram predstavljen je na slici 5.1.2.:



**Slika 5.1.2.** Fazorski dijagram napona na kojem su nacrtani fazori  $\bar{U}_{ab}$ ,  $\bar{U}_{bc}$ ,  $\bar{U}_{cd}$

Ako se početne faze napona izraze u radijanima, fazore je moguće predstaviti na sledeći način:

za napon  $u_{ab} = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + 135^\circ)[V] = 4\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{3\pi}{4})[V]$  početna faza je  $\frac{3\pi}{4}$  a fazor je

$\bar{U}_{ab} = 4 \cdot e^{j\frac{3\pi}{4}}[V]$ , gde je  $e$  osnova prirodnog logaritma a  $j$  je imaginarna jedinica.

Za napon  $u_{bc} = -4\sqrt{3} \sin(\omega t + 60^\circ)V = 4\sqrt{3} \sin(\omega t - 120^\circ)V = 4\sqrt{3} \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3})[V]$

fazor je  $\bar{U}_{bc} = \frac{4\sqrt{3}V}{\sqrt{2}} e^{-j\frac{2\pi}{3}} = 2\sqrt{6} e^{-j\frac{2\pi}{3}}[V]$ ,

a za napon  $u_{cd} = 4\cos(\omega t - 150^\circ)V = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - 60^\circ)V = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})[V]$

fazor je  $\bar{U}_{cd} = 2\sqrt{2} \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}[V]$ .

2) Za fazore kao i za trenutne vrednosti struja i napona važe Kirhofovi zakoni. Fazor  $\bar{U}_{ad}$  je:

$$\bar{U}_{ad} = \bar{U}_{ab} + \bar{U}_{bc} + \bar{U}_{cd} = 4V e^{j\frac{3\pi}{4}} + 2\sqrt{6}V e^{-j\frac{2\pi}{3}} + 2\sqrt{2}V e^{-j\frac{\pi}{3}},$$

$$\bar{U}_{ad} = 4V \cos(\frac{3\pi}{4}) + j4V \sin(\frac{3\pi}{4}) + 2\sqrt{6}V \cos(-\frac{2\pi}{3}) + j2\sqrt{6}V \sin(-\frac{2\pi}{3}) +$$

$$+ 2\sqrt{2}V \cos(-\frac{\pi}{3}) + j2\sqrt{2}V \sin(-\frac{\pi}{3}),$$

$$\bar{U}_{ad} = 4V(-\frac{\sqrt{2}}{2}) + j4V \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{6}V(-\frac{1}{2}) + j2\sqrt{6}V(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\sqrt{2}V \frac{1}{2} + j2\sqrt{2}V(-\frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$\bar{U}_{ad} = -2\sqrt{2}V + j2\sqrt{2}V - \sqrt{6}V - j3\sqrt{2}V + \sqrt{2}V - j\sqrt{6}V,$$

$$\bar{U}_{ad} = (-2\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2})V + j(2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2})V ,$$

$$\bar{U}_{ad} = (-\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2})V + j(-\sqrt{2} - \sqrt{3} \cdot \sqrt{2})V = -\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})V - j\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})V ,$$

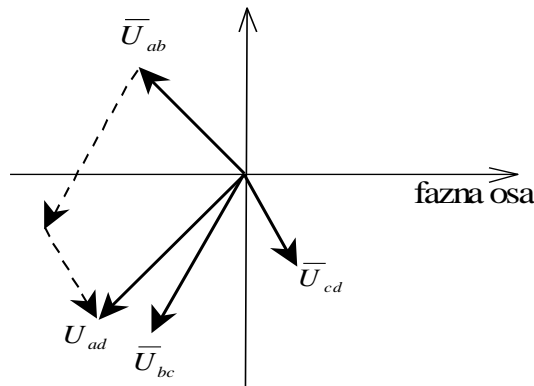
$$\bar{U}_{ad} = -\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})[1 + j]V = -\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})\sqrt{2}V e^{j\frac{\pi}{4}} = -2(1 + \sqrt{3})V e^{j\frac{\pi}{4}} = 2(1 + \sqrt{3}) e^{j(\frac{\pi}{4} - \pi)} [V] ,$$

$$\bar{U}_{ad} = U_{ad} e^{j\theta_{ad}} = 2(1 + \sqrt{3}) e^{-j\frac{3\pi}{4}} [V] ,$$

odnosno

$$\bar{U}_{ad} = U_{ad} \angle \theta_{ad} = 2(1 + \sqrt{3})[V] \angle -135^\circ .$$

Fazor  $\bar{U}_{ad}$  može da se odredi i grafički, kao na slici 5.1.3.:



**Slika 5.1.3.** Fazorski dijagram svih napona grana u kolu

Na slici 5.1.4. predstavljeno je kolo u kompleksnom domenu sa oznakama referentnih smerova svih napona grana u kolu. Imajući u vidu kako su u prethodnoj tački rešenja zadatka uvedeni fazori, trenutna vrednost napona čiji je fazor  $\bar{U}_{ad} = U_{ad} e^{j\theta_{ad}}$  označava se sa  $u_{ad}$  i jednaka je:

$$u_{ad} = U_{ad} \sqrt{2} \sin(\omega t + \theta_{ad}) ,$$

gde je:

$$U_{ad} = 2(1 + \sqrt{3})[V] \cong 5,464[V] \text{ efektivna vrednost napona } u_{ad} , \text{ kao i moduo fazora } \bar{U}_{ad} ,$$

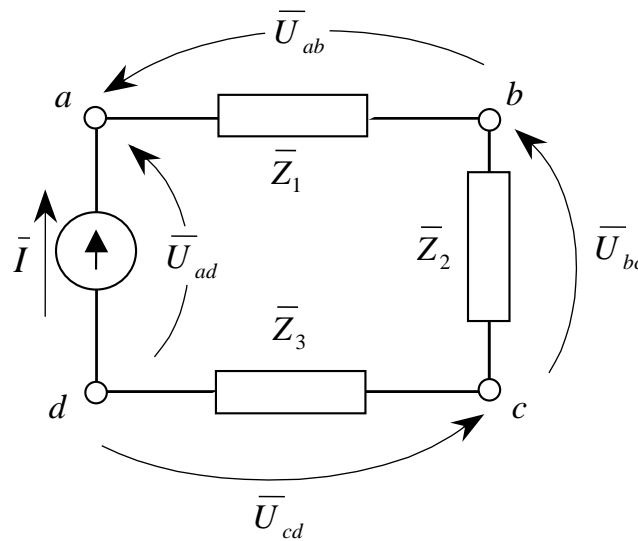
$$\theta_{ad} = -\frac{3\pi}{4} = -135^\circ \text{ je početna faza napona } u_{ad} \text{ odnosno argument fazora } \bar{U}_{ad} .$$

Traženi izraz u vremenskom domenu, prema tome je:

$$u_{ad} = U_{ad} \sqrt{2} \sin(\omega t + \theta_{ad}) = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})V \sin(\omega t - 135^\circ) = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}) \sin(\omega t - \frac{3\pi}{4}) [V] .$$

Amplituda ovog napona je  $U_{admax} = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})[V] \cong 7,73[V]$ .

3) Struja kroz strujni izvor je data i jednaka  $i(t) = 2\sin(\omega t + 165^\circ)[A]$  a napon na krajevima strujnog izvora odredili smo u prethodnoj tački.



**Slika 5.1.4.** Ekvivalentna šema kola u kompleksnom domenu; na slici su označeni referentni smerovi svih napona grana i referentni smer struje u kolu

Aktivna snaga strujnog izvora je:

$$P_{si} = U_{ad} \cdot I \cdot \cos \angle(\bar{U}_{ad}, \bar{I}),$$

gde je:

$$I = \frac{2}{\sqrt{2}}[A] = \sqrt{2}[A] \quad \text{efektivna vrednost struje strujnog izvora,}$$

$$\bar{I} = I e^{j\psi} = I \angle \psi \quad \text{fazor (kompleksna efektivna vrednost) struje strujnog izvora, i}$$

$\angle(\bar{U}_{ad}, \bar{I}) = \theta_{ad} - \psi$  ugao između fazora napona na strujnom izvoru i fazora struje strujnog izvora odnosno fazna razlika između napona na strujnom izvoru i struje strujnog izvora.

Prema tome, aktivna snaga strujnog izvora je:

$$P_{si} = U_{ad} \cdot I \cdot \cos(\theta_{ad} - \psi) = 2(1 + \sqrt{3})V \cdot \sqrt{2}A \cdot \cos(-135^\circ - 165^\circ),$$

$$P_{si} = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})W \cdot \cos(-300^\circ) = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})W \cdot \cos(360^\circ - 300^\circ),$$

$$P_{si} = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})W \cdot \cos(60^\circ) = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})W \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})[W].$$

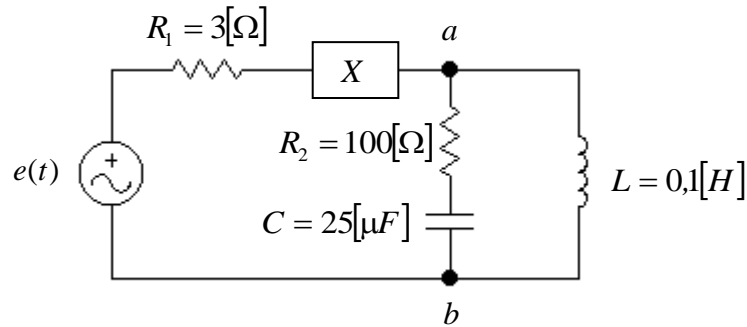
Aktivna snaga strujnog izvora je:

$$P_{si} = \sqrt{2}(1 + \sqrt{3})[W] \cong 3,86[W], \text{ a to je približno } 4[W].$$

Pošto je snaga strujnog izvora pozitivna, možemo da zaključimo da strujni izvor radi zaista kao izvor električne energije, to jest da je u režimu generatora.

**5.2.** Za kolo na slici:

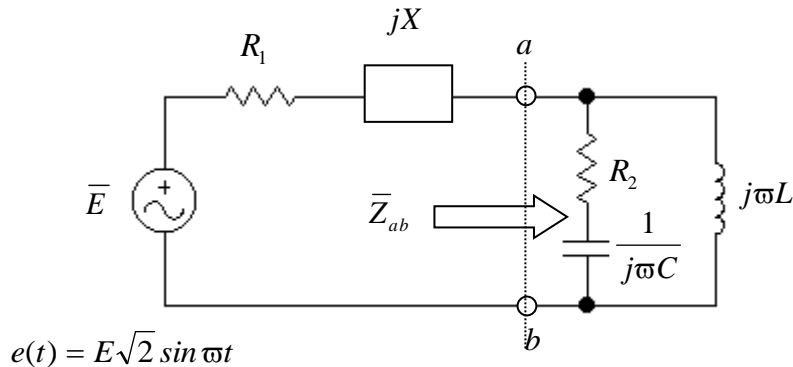
- Odrediti ekvivalentnu impedansu između tačaka  $a$  i  $b$ , sa desne strane
- Odrediti vrednost reaktanse  $X$ , tako da su napon izvora i struja kroz izvor u fazi
- Da li je reaktansa  $X$  induktivna ili kapacitivna? Odrediti vrednost  $L$  ili  $C$ .
- Za slučaj (b) odrediti aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu izvora.



$$e(t) = 141 \sin 400t \text{ [V]}$$

**Rešenje:**

a) Ekvivalentna impedansa između tačaka  $a$  i  $b$ , sa desne strane je ekvivalentna impedansa za paralelnu vezu kalem induktivnosti  $L$  i grane u kojoj je redna veza otpornika otpornosti  $R_2$  i kondenzatora kapacitivnosti  $C$ . Ekvivalentna impedansa između tačaka  $a$  i  $b$ , sa desne strane označava se sa  $\bar{Z}_{ab} = \bar{Z}_{ba}$ , kao na slici 5.2.1.:



**Slika 5.2.1.** Ekvivalentna šema kola u kompleksnom domenu

Trenutna vrednost EMS generatora je  $e(t) = E\sqrt{2} \sin \omega t$ , pa je kružna učestanost  $\omega = 400 \text{ [Hz]}$ .

Tražena ekvivalentna impedansa je:

$$\bar{Z}_{ab} = (\bar{Z}_{R_2} + \bar{Z}_C) || \bar{Z}_L = \frac{(\bar{Z}_{R_2} + \bar{Z}_C) \bar{Z}_L}{\bar{Z}_{R_2} + \bar{Z}_C + \bar{Z}_L},$$

gde je  $\bar{Z}_{R_2} = R_2 = 100 \text{ [Ω]}$  impedansa otpornika otpornosti  $R_2$ ,

$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{j400 \text{ Hz} 25 \mu\text{F}} = -\frac{j}{400 \text{ Hz} 25 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = -\frac{j}{0,01} \Omega = -j100 [\Omega]$  je impedansa kondenzatora kapacitivnosti  $C$ , a

$\bar{Z}_L = j\omega L = j400 \text{ Hz} 0,1 \text{ H} = j40 [\Omega]$  je impedansa kalema induktivnosti  $L$ .

Tražena ekvivalentna impedansa je:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{ab} &= \frac{(R_2 + \frac{1}{j\omega C}) j\omega L}{R_2 + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{(100 \Omega - j100 \Omega) j40 \Omega}{100 \Omega - j100 \Omega + j40 \Omega} = \frac{100 \Omega \cdot 40 \Omega (1 - j) j}{100 \Omega + j(-100 \Omega + 40 \Omega)}, \\ \bar{Z}_{ab} &= \frac{4000 \Omega^2 (j - (-1))}{100 \Omega - j60 \Omega} = \frac{4000 (1 + j)}{100 - j60} \Omega = \frac{400 (1 + j)(10 + j6)}{10^2 + 6^2} [\Omega], \\ \bar{Z}_{ab} &= \frac{400 (10 + j10 + j6 - 6)}{100 + 36} \Omega = \frac{400 (4 + j16)}{136} \Omega = \frac{400 (1 + j4)}{34} \Omega = \frac{200 (1 + j4)}{17} [\Omega], \\ \bar{Z}_{ab} &= \frac{200}{17} [\Omega] + j \frac{800}{17} [\Omega] = R_{ab} + jX_{ab}.\end{aligned}$$

Time je određena tražena ekvivalentna impedansa. Sada dato kolo može da se predstavi jednostavnijom ekvivalentnom šemom kao na slici 5.2.2.

Tražena ekvivalentna impedansa može da se predstavi i na drugi način. Tada je:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{ab} &= \frac{(R_2 + \frac{1}{j\omega C}) j\omega L}{R_2 + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{(100 \Omega - j100 \Omega) j40 \Omega}{100 \Omega - j100 \Omega + j40 \Omega} = \frac{100 \Omega \cdot 40 \Omega (1 - j) j}{100 \Omega + j(-100 \Omega + 40 \Omega)}, \\ \bar{Z}_{ab} &= \frac{4000 \Omega^2 (j - (-1))}{100 \Omega - j60 \Omega} = \frac{4000 (1 + j)}{100 - j60} [\Omega] = Z_{ab} e^{j\varphi_{ab}} = Z_{ab} \angle \varphi_{ab},\end{aligned}$$

gde je  $Z_{ab}$  moduo ove ekvivalentne impedanse a  $\varphi_{ab}$  je njen argument. Sledi da je:

$$\begin{aligned}Z_{ab} &= |\bar{Z}_{ab}| = \left| \frac{4000 (1 + j)}{100 - j60} \Omega \right| = \frac{4000 |1 + j|}{|100 - j60|} [\Omega] = \frac{4000 \sqrt{1+1}}{\sqrt{100^2 + 60^2}} [\Omega] = \frac{4000 \sqrt{2}}{100 \sqrt{1^2 + 0,6^2}} [\Omega], \\ Z_{ab} &= |\bar{Z}_{ab}| = \frac{40 \sqrt{2}}{\sqrt{1,36}} [\Omega] \cong 48,507 [\Omega],\end{aligned}$$

$$\varphi_{ab} = \arg(\bar{Z}_{ab}) = \arg\left(\frac{4000 (1 + j)}{100 - j60} \Omega\right) = \arg(4000) + \arg(1 + j) - \arg(100 - j60).$$

Odavde je argument ekvivalentne impedanse  $\bar{Z}_{ab}$  izražen u radijanima jednak:

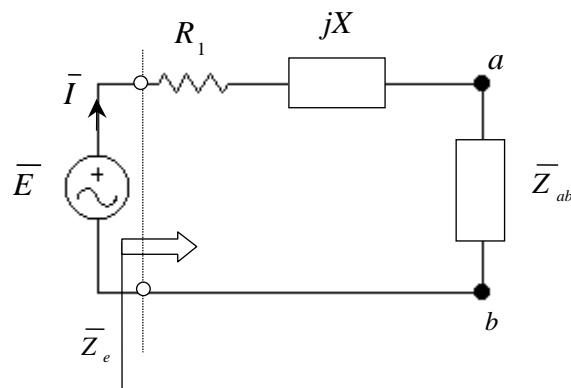
$$\varphi_{ab} = 0 + \frac{\pi}{4} - \arctg\left(\frac{-60}{100}\right) = \frac{\pi}{4} - \arctg(-0,6) \cong 0,245$$

odnosno

$$\varphi_{ab} = 0^\circ + 45^\circ - \arctg\left(\frac{-60}{100}\right) = 45^\circ - \arctg(-0,6) \cong 45^\circ - 30,964^\circ = 14,036^\circ$$

kada se izrazi u stepenima.

b) Napon izvora i struja kroz izvor biće u fazi ako je ekvivalentna impedansa koju „vidi” generator (na slici 5.2.2. označena sa  $\bar{Z}_e$ ) realna, to jest ako važi  $\bar{Z}_e = \text{Re}(\bar{Z}_e)$ .



**Slika 5.2.2.** Ekvivalentna šema kola u kompleksnom domenu

Sa slike 5.2.2. vidimo da je EMS generatora jednaka:

$$\bar{E} = (R_1 + jX + \bar{Z}_{ab})\bar{I} = \bar{Z}_e\bar{I},$$

gde je ekvivalentna impedansa koju „vidi” generator:

$$\bar{Z}_e = R_1 + jX + \bar{Z}_{ab} = 3\Omega + jX + \frac{200}{17}\Omega + j\frac{800}{17}\Omega = \left(3 + \frac{200}{17}\right)[\Omega] + j\left(X + \frac{800}{17}\right)[\Omega].$$

Iz uslova  $\bar{Z}_e = \text{Re}(\bar{Z}_e)$  odnosno  $\text{Im}(\bar{Z}_e) = 0[\Omega]$  možemo da odredimo traženu vrednost reaktanse  $X$ :

$$\text{Im}(\bar{Z}_e) = 0[\Omega] = X + \frac{800}{17}[\Omega].$$

Oдавde sledi da je tražena vrednost reaktanse  $X$ :

$$X = -\frac{800}{17}[\Omega] \cong -47,06[\Omega].$$

c) Reaktansa određena pod b) je kapacitivna, zato što je  $X < 0$ . Odredimo njenu ekvivalentnu kapacitivnost  $C_1$ :

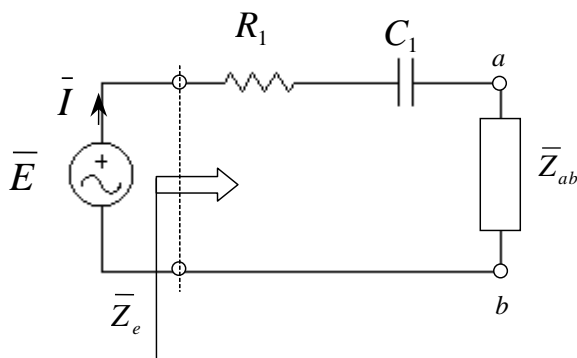
$$jX = \frac{1}{j\omega C_1}, \text{ gde je reaktansa } X = -\frac{800}{17}[\Omega],$$

a  $\omega = 400[\text{Hz}]$  je kružna učestanost.

Tada je:

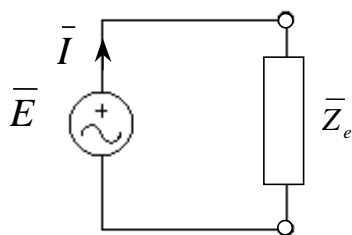
$$C_1 = \frac{1}{j^2 \omega X} = -\frac{1}{\omega X} = -\frac{1}{400 \text{ Hz} \left(-\frac{800}{17} \Omega\right)} = \frac{17}{320000} \text{ F} = \frac{17}{32} 10^{-4} [\text{F}] \cong 53,125 [\mu\text{F}].$$

Ekvivalentna šema kola prikazana na slici 5.2.2. ima kondenzator umesto elementa reaktanse  $X$ , kao na slici 5.2.3.:



**Slika 5.2.3.** Ekvivalentna šema kola u kompleksnom domenu

d) Odreditmo aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu izvora. Ekvivalentna šema kola dobijenog pod b) može da se pojednostavi, kao na slici 5.2.4.:



**Slika 5.2.4.** Ekvivalentna šema kola u kompleksnom domenu

Pošto su referentni smerovi struje kroz izvor i EMS izvora usklađeni kao za generator, kompleksna snaga izvora je:

$$\bar{S} = \bar{E} \bar{I}^*,$$

gde je:

$$\bar{E} = \bar{Z}_e \bar{I} = E e^{j0} \quad \text{fazor (kompleksna efektivna vrednost) EMS generatora a}$$

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_e} \quad \text{fazor (kompleksna efektivna vrednost) struje kroz generator.}$$

Pošto je trenutna vrednost EMS generatora  $e(t) = E\sqrt{2} \sin \omega t = 141 [\text{V}] \sin 400t$ , možemo za fazor EMS generatora da usvojimo, na primer:

$$\bar{E} = E e^{j0} = \frac{141 \text{ V}}{\sqrt{2}} e^{j0} = E = \frac{141}{\sqrt{2}} \text{ V} = \frac{141\sqrt{2}}{2} [\text{V}] \cong 100 [\text{V}].$$



Dakle, kompleksna snaga izvora je jednaka:

$$\bar{S} = \bar{E} \left( \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_e} \right)^* = \frac{\bar{E} \bar{E}^*}{\bar{Z}_e^*} = \frac{E^2}{\bar{Z}_e^*}.$$

Za slučaj b) ekvivalentna impedansa koju „vidi” generator označena sa  $\bar{Z}_e$  je realna i jednaka:

$$\bar{Z}_e = \left( 3 + \frac{200}{17} \right) [\Omega] = \frac{251}{17} [\Omega] = Z_e \cong 14,765 [\Omega],$$

pa je kompleksna snaga izvora jednaka:

$$\bar{S} = \frac{E^2}{Z_e} = \left( \frac{141}{\sqrt{2}} V \right)^2 \frac{17}{251 \Omega} = \frac{19881}{2} V^2 \frac{17}{251} \Omega^{-1} \cong 673,261 [VA].$$

Prividna snaga izvora je moduo kompleksne snage izvora, pa je:

$$S = |\bar{S}| = \frac{E^2}{Z_e} = \frac{19881}{2} \cdot \frac{17}{251} [VA] \cong 673,261 [VA].$$

Pošto je kompleksna snaga izvora  $\bar{S} = P + jQ$ , to je aktivna snaga izvora njen realni deo:

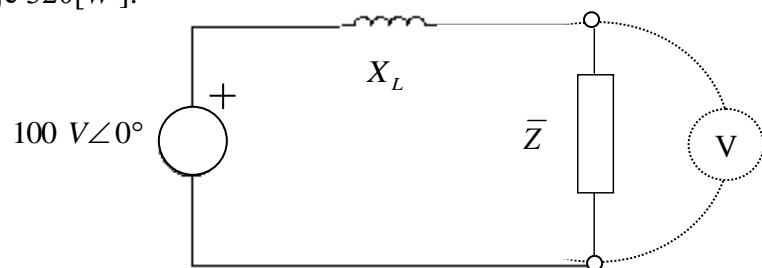
$$P = \operatorname{Re}(\bar{S}) = \frac{E^2}{Z_e} = \frac{19881}{2} \cdot \frac{17}{251} [W] \cong 673,261 [W],$$

i u ovom slučaju je brojno jednaka prividnoj i kompleksnoj snazi, a reaktivna snaga izvora je imaginarni deo kompleksne snage izvora:

$$Q = \operatorname{Im}(\bar{S}) = 0 [Var].$$

**5.3.** Sa nepoznatom impedansom  $\bar{Z}$  na red je vezan induktivitet, čija je reaktansa  $25[\Omega]$ . Kada u kolu teče struja od  $4[A]$ , voltmetar povezan na krajeve impedanse pokazuje  $179[V]$ . Rasipanje snage (Džulovi gubici) je  $320[W]$ .

- Nađi faktor snage kola.
- Koja je otpornost kola.
- Nađi impedansu  $Z$ .

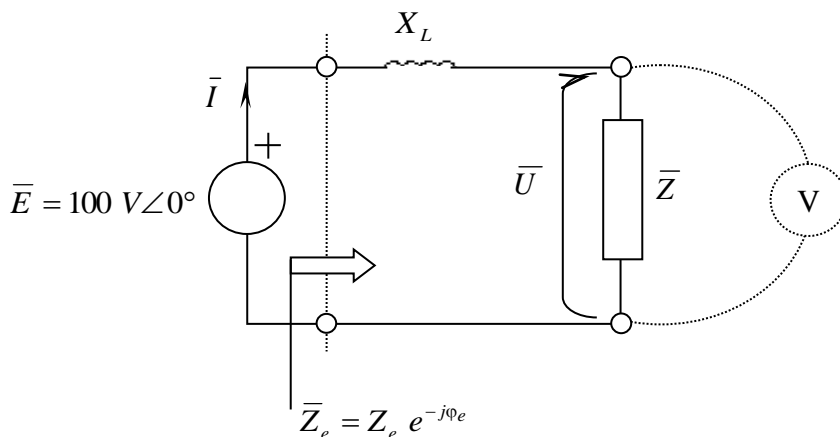


**Rešenje:**

- Ekvivalentna šema datog kola u kompleksnom domenu je na slici 5.3.1.

Faktor snage kola može da se dobije kao količnik aktivne snage kola i prividne snage kola:

$$\cos \varphi_e = \frac{P}{S}.$$



**Slika 5.3.1.** Ekvivalentna šema kola u kompleksnom domenu

Aktivna snaga kola je jednaka Džulovim gubicima odnosno rasipanju snage koje je dato:

$$P = 320[\text{W}].$$

Ako je efektivna vrednost struje u kolu  $I = |\bar{I}| = 4[\text{A}]$  onda, pošto je efektivna vrednost EMS naponskog generatora  $E = |\bar{E}| = 100[\text{V}]$ , prividna snaga kola ima vrednost:

$$S = EI = 100\text{V} \cdot 4\text{A} = 400[\text{VA}].$$

Iz prethodnog sledi da je faktor snage kola:

$$\cos \varphi_e = \frac{P}{S} = \frac{320\text{W}}{400\text{VA}} = \frac{320}{400} = 0,8.$$

b) Ekvivalentna otpornost kola  $R$  može da se odredi na osnovu aktivne snage kola  $P$  i efektivne vrednosti struje u kolu  $I$ . Ako je efektivna vrednost struje u kolu  $I = |\bar{I}| = 4[\text{A}]$  onda, pošto je aktivna snaga kola:

$$P = RI^2 = 320[\text{W}],$$

ekvivalentna otpornost kola je:

$$R = \frac{P}{I^2} = \frac{320\text{W}}{(4\text{A})^2} = \frac{320\text{W}}{16\text{A}^2} = 20[\Omega].$$

c) Odredimo moduo impedanse  $Z = \bar{Z}$ . Na slici 5.3.1. vidimo da je fazor napona na voltmetru:

$$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I},$$

gde je  $\bar{Z}$  nepoznata impedansa. Ako voltmetar meri efektivnu vrednost napona  $U = |\bar{U}| = 179[\text{V}]$  i ako je efektivna vrednost struje u kolu  $I = |\bar{I}| = 4[\text{A}]$  onda je moduo impedanse:

$$Z = |\bar{Z}| = \left| \frac{\bar{U}}{\bar{I}} \right| = \frac{U}{I} = \frac{179V}{4A} = 44,75[\Omega].$$

Možemo da odredimo i kompleksnu vrednost impedanse  $\bar{Z}$ , na sledeći način. Ekvivalentna impedansa kola je:

$$\bar{Z}_e = jX_L + \bar{Z} = jX_L + R + jX = R + j(X_L + X),$$

a tražena impedansa je:

$$\bar{Z} = R + jX.$$

Pošto je  $R = 20[\Omega]$  otpornost kola ali i rezistansa tražene impedanse čiji je moduo:

$$Z = |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = 44,75[\Omega],$$

apsolutna vrednost nepoznate reaktanse je:

$$|X| = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(44,75\Omega)^2 - (20\Omega)^2} \cong 40,032[\Omega],$$

odnosno reaktansa je ili:

$$X = -\sqrt{Z^2 - R^2} = -\sqrt{(44,75\Omega)^2 - (20\Omega)^2} \cong -40,032[\Omega]$$

ili:

$$X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(44,75\Omega)^2 - (20\Omega)^2} \cong 40,032[\Omega].$$

Znak reaktanse možemo da procenimo na osnovu ekvivalentne impedanse kola:

$$\bar{Z}_e = \frac{\bar{E}}{\bar{I}} = R + j(X_L + X),$$

pa je moduo ekvivalentne impedanse kola:

$$Z_e = |\bar{Z}_e| = \left| \frac{\bar{E}}{\bar{I}} \right| = \frac{E}{I} = \frac{100V}{4A} = 25[\Omega].$$

Znajući da je moduo ekvivalentne impedanse kola:

$$Z_e = |\bar{Z}_e| = |R + j(X_L + X)| = \sqrt{R^2 + (X_L + X)^2},$$

dobijamo

$$|X_L + X| = \sqrt{Z_e^2 - R^2} = \sqrt{(25\Omega)^2 - (20\Omega)^2} = \sqrt{5\Omega \cdot 45\Omega} = 15[\Omega],$$

odnosno ukupna reaktansa kola je:

$$X_L + X = \pm 15[\Omega].$$

Reaktansa induktiviteta je data i jednaka  $X_L = 25\Omega$ , pa je tražena reaktansa:

$$X = \pm 15\Omega - X_L = \pm 15\Omega - 25\Omega,$$

odnosno reaktansa je ili  $X = +15\Omega - 25\Omega = -10[\Omega]$  ili  $X = -15\Omega - 25\Omega = -40[\Omega]$ . Dakle,

$$((X \cong -40,032[\Omega]) \vee (X \cong 40,032[\Omega])) \wedge ((X = -10[\Omega]) \vee (X = -40[\Omega])),$$

pa zaključujemo da je tražena reaktansa:

$$X = -40[\Omega].$$

Time je određena impedansa:

$$\bar{Z} = R + jX = (20 - j40)[\Omega].$$

Provere radi odredimo efektivnu vrednost struje u kolu kada je impedansa

$\bar{Z} = R + jX = (20 - j40)[\Omega]$  i kada je efektivna vrednost napona koju meri voltmetar:

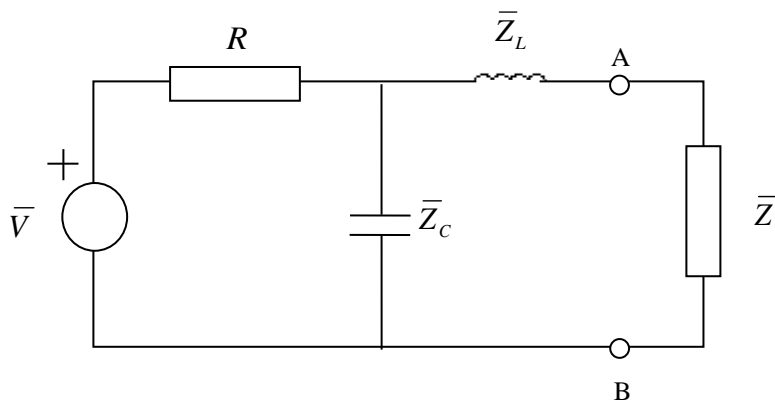
$$U = |\bar{U}| = 179[V].$$

Tada je:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{179V}{|20\Omega - j40\Omega|} = \frac{179V}{\sqrt{(20\Omega)^2 + (40\Omega)^2}} = \frac{179V}{\sqrt{2000\Omega^2}} \cong 4,0026[A] \approx 4[A],$$

dakle posle zaokruživanja na dve decimale efektivna vrednost struje u kolu je  $I = 4[A]$ , kao što je u zadatku i bilo dato.

**5.4.** U kolu prikazanom na slici odrediti kompleksnu impedansu opterećenja  $\bar{Z}$  tako da se na njemu razvije maksimalna aktivna snaga. Za tako određeno  $\bar{Z}$  izračunati maksimalnu aktivnu snagu. Podaci:  $\bar{V} = 10V\angle 0^\circ$ ,  $R = 4\Omega$ ,  $\bar{Z}_C = -j3\Omega$ ,  $\bar{Z}_L = j1\Omega$ .



**Rešenje:**

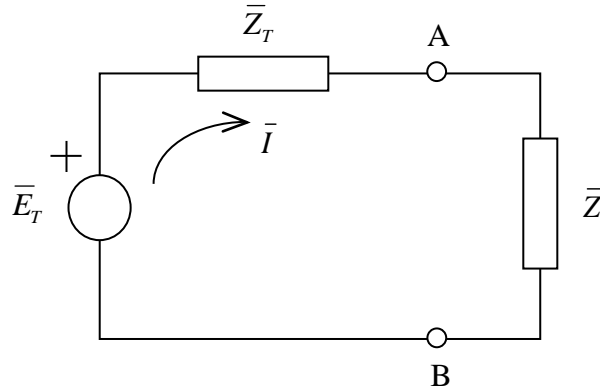
U odnosu na impedansu  $\bar{Z}$  ostatak kola levo od tačaka A i B može se predstaviti kao ekvivalentan Tevenenov generator. Elektromotorna sila Tevenenovog generatora nalazi se:

$$\bar{E}_T = \frac{\bar{Z}_C}{R + \bar{Z}_C} \bar{V} = \frac{-j3\Omega}{4\Omega - j3\Omega} 10V\angle 0^\circ = 6V\angle -53,13^\circ,$$

dok je ekvivalentna impedansa Tevenenovog generatora:

$$\bar{Z}_T = \bar{Z}_L + \frac{R\bar{Z}_C}{R + \bar{Z}_C} = j1\Omega + \frac{4\Omega(-j3\Omega)}{4\Omega - j3\Omega} = (1,44 - j0,92)\Omega = R_T + jX_T.$$

Kolo ekvivalentirano korišćenjem Tevenenove teoreme može se prikazati slikom 5.4.1.:



**Slika 5.4.1.** Ekvivalentna šema kola

Ako se nepoznata impedansa  $\bar{Z}$  prikaže kao:

$$\bar{Z} = R + jX,$$

aktivna snaga koja se razvija na toj impedansi je:

$$P = R \cdot I^2,$$

gde je  $I$  efektivna vrednost struje u kolu i:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_T}{\bar{Z}_T + \bar{Z}} = \frac{\bar{E}_T}{(R_T + jX_T) + (R + jX)}.$$

Izraz za aktivnu snagu postaje:

$$P = R \frac{|\bar{E}_T|^2}{(R_T + R)^2 + (X_T + X)^2} = R \frac{E_T^2}{(R_T + R)^2 + (X_T + X)^2}.$$

Ovaj izraz ima maksimalnu vrednost kada je:

$$X_T = -X \text{ i } R_T = R,$$

odnosno

$$\bar{Z} = \bar{Z}_T^*,$$

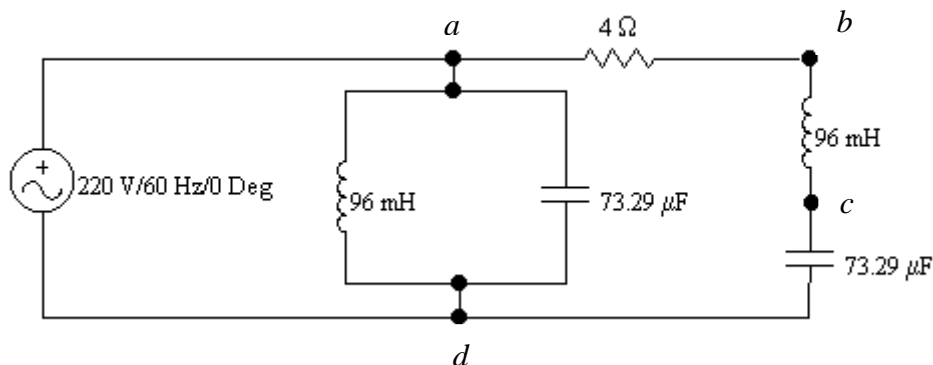
$$\bar{Z} = (1,44 + j0,92)\Omega$$

Maksimalna aktivna snaga kola je:

$$P_{max} = \frac{E_T^2}{4R_T} = \frac{(6V)^2}{4 \cdot 1,44 \Omega} = 6,25W.$$

5.5. Za kolo prikazano na slici odrediti:

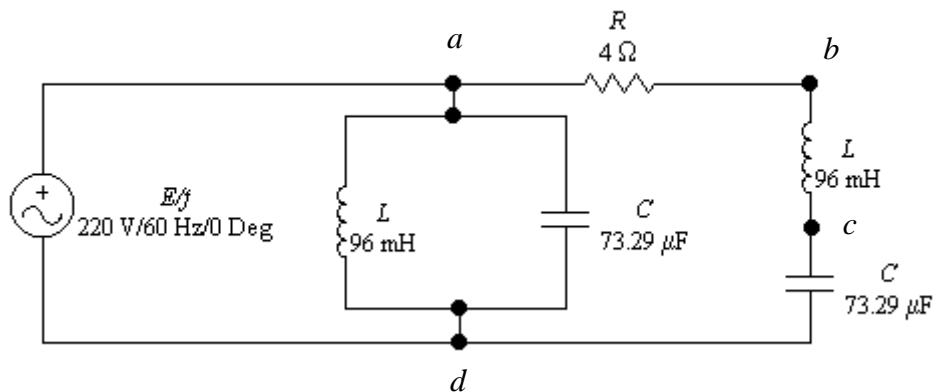
- sve struje u kolu u kompleksnom i vremenskom domenu,
- napone  $U_{bc}$  i  $U_{cd}$ ,
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu izvora.



**Rešenje:**

- Uvedimo oznake kao na slici 5.5.1, odnosno:

$$\bar{E} = E e^{j0} = 220V = E, \quad f = 60\text{Hz}, \quad R = 4\Omega, \quad L = 0,096\text{H} \text{ i } C = 73,29\mu\text{F}.$$



**Slika 5.5.1.** Ekvivalentna šema datog kola sa označenim komponentama

Možemo pretpostaviti da je trenutna vrednost elektromotorne sile generatora bilo  $e(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t)$  bilo  $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t)$ , gde je  $\omega = 2\pi f$  kružna učestanost elektromotorne sile. Neka je:

$$e(t) = E\sqrt{2} \sin(\omega t) = E\sqrt{2} \sin(2\pi f t).$$

Za kolo u kompleksnom domenu (slika 5.5.2) prema Kirhofovima zakonima važi:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2,$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_3 + \bar{I}_4,$$

$$\bar{I}_5 = \bar{I}_2,$$

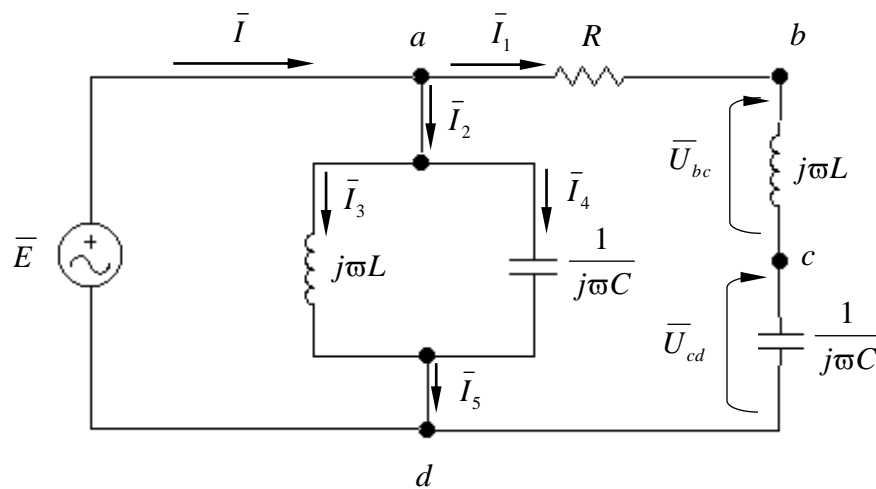
$$\bar{E} = j\omega L \bar{I}_3,$$

$$\bar{E} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_4,$$

$$\bar{E} = \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I}_1,$$

a to je sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih, gde je kružna učestanost signala u kolu

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 60 \text{ Hz} \approx 376,99 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \approx 377 \text{ s}^{-1}.$$



**Slika 5.5.2.** Ekvivalentna šema datog kola u domenu kompleksne učestanosti, sa označenim referentnim smerovima napona i struja

Iz gornjeg sistema jednačina dobijamo struju kroz rednu  $RLC$  vezu u kompleksnom domenu:

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{220V}{4\Omega + j\left(120\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} 0,096H - \frac{1}{120\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} 73,29 \cdot 10^{-6}F}\right)} \approx \frac{220V}{4,0000004 \Omega},$$

$$\bar{I}_1 = I_1 e^{j\psi_1} \approx \frac{220V}{4,0000004 \Omega} \approx \frac{220V}{4\Omega} = 55A = I_1.$$

U vremenskom domenu struja kroz rednu  $RLC$  vezu je

$$i_1 = i_1(t) = I_1 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_1) = 55\sqrt{2} A \sin(120\pi t),$$

imajući u vidu da je  $I_1 = 55A$ , odnosno  $\psi_1 = 0$ .

U kompleksnom domenu struja kroz kondenzator od čvora  $a$  do čvora  $d$  je:

$$\bar{I}_4 = j\omega C \bar{E} = j\omega C E = \omega C E e^{j\frac{\pi}{2}} = I_4 e^{j\psi_4},$$

pa je:

$$I_4 = \omega C E = 2\pi \cdot 60 \text{ Hz} \cdot 73,29 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 220 \text{ V} \approx 6,08 \text{ A},$$

$$\psi_4 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ,$$

odnosno:

$$\bar{I}_4 = I_4 e^{j\psi_4} \approx 6,08 \text{ A} e^{j\frac{\pi}{2}} = j6,08 \text{ A}.$$

Struja kroz kondenzator od čvora  $a$  do čvora  $d$  u vremenskom domenu je:

$$i_4 = i_4(t) = I_4 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_4) \approx 6,08 \sqrt{2} \text{ A} \sin\left(120\pi t + \frac{\pi}{2}\right).$$

U kompleksnom domenu struja kroz kalem vezan od čvora  $a$  do čvora  $d$  je:

$$\bar{I}_3 = \frac{\bar{E}}{j\omega L} = \frac{E}{j\omega L} = -j \frac{E}{\omega L} = \frac{E}{\omega L} e^{-j\frac{\pi}{2}} = I_3 e^{j\psi_3},$$

gde je:

$$I_3 = \frac{E}{\omega L} = \frac{220 \text{ V}}{2\pi \cdot 60 \text{ Hz} \cdot 0,096 \text{ H}} \approx 6,08 \text{ A},$$

$$\psi_3 = -\frac{\pi}{2} = -90^\circ,$$

odnosno:

$$\bar{I}_3 = I_3 e^{j\psi_3} \approx 6,08 \text{ A} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j6,08 \text{ A}.$$

U vremenskom domenu struja kroz kalem vezan od čvora  $a$  do čvora  $d$  je:

$$i_3 = i_3(t) = I_3 \sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_3) \approx 6,08 \sqrt{2} \text{ A} \sin\left(120\pi t - \frac{\pi}{2}\right).$$

U kompleksnom domenu označene struje kroz kratke veze su:

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_5 = \bar{I}_3 + \bar{I}_4 = -j \frac{E}{\omega L} + j\omega C E \approx -j6,08 \text{ A} + j6,08 \text{ A} = 0 \text{ A},$$

pošto su vrednosti parametara takve da je:

$$\frac{1}{\omega L} \approx \omega C.$$

$$\bar{I}_2 = I_2 e^{j\psi_2} = \bar{I}_5 = I_5 e^{j\psi_5} \approx 0 \text{ A}, \text{ pa je } I_2 = I_5 \approx 0 \text{ A}.$$

Stoga su trenutne vrednosti obe struje kroz kratke veze jednake nuli, odnosno:



$$i_2 = i_2(t) = i_5 = i_5(t) = 0A.$$

Struja kroz generator od čvora  $d$  do čvora  $a$  u kompleksnom domenu je:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}_1 = Ie^{j\psi} \approx \frac{220V}{4,0000004 \Omega} \approx \frac{220V}{4\Omega} = 55A = I,$$

pa je  $I = 55A$ , odnosno  $\psi = 0$ .

U vremenskom domenu struja kroz generator je:

$$i = i(t) = i_1(t) = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi) = 55\sqrt{2}A \sin(120\pi t).$$

Time su određene sve struje grana datog kola.

b) Prema šemi za kompleksni domen (slika 5.5.2) na osnovu Kirhofovih zakona važi:

$$\bar{U}_{bc} = j\omega L \bar{I}_1 = U_{bc} e^{j\theta_{bc}}.$$

Dakle, kompleksna efektivna vrednost napona na kalemu od čvora  $b$  do čvora  $c$  je:

$$\bar{U}_{bc} = j\omega L I_1 e^{j\psi_1} = j\omega L I_1 = \omega L I_1 e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

Tražena efektivna vrednost ovog napona je:

$$U_{bc} = |\bar{U}_{bc}| = \omega L I_1 = 120\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot 0,096H \cdot 55A \approx 1991V.$$

Kompleksna efektivna vrednost napona na kondenzatoru od čvora  $c$  do čvora  $d$  je:

$$\bar{U}_{cd} = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_1 = -j \frac{1}{\omega C} I_1 e^{j\psi_1} = \frac{I_1}{\omega C} e^{j\left(\psi_1 - \frac{\pi}{2}\right)} = U_{cd} e^{j\theta_{cd}},$$

prema šemi za kompleksni domen na slici 5.5.2. Tražena efektivna vrednost ovog napona je:

$$U_{cd} = |\bar{U}_{cd}| = \frac{I_1}{\omega C} = \frac{55A}{120\pi \frac{\text{rad}}{s} \cdot 73,29\mu F} \approx 1991V.$$

Pošto su vrednosti parametara takve da je:

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C,$$

važi da je:

$$U_{bc} = U_{cd}.$$

c) Da bismo odredili aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu izvora odredimo prvo kompleksnu snagu izvora:

$$\bar{S} = \bar{E} \cdot \bar{I}^* = E e^{j\theta} \cdot I e^{-j\psi} = E \cdot I = 220V \cdot 55A = 12100VA = 12,1kVA.$$

Znajući da je kompleksna snaga povezana sa prividnom, aktivnom i reaktivnom snagom prema formuli:

$$\bar{S} = S e^{j\varphi} = P + jQ,$$

dobijamo da je aktivna snaga izvora:

$$P = \operatorname{Re}\{\bar{S}\} = 12100 \text{ W} = 12,1 \text{ kW},$$

reaktivna snaga izvora:

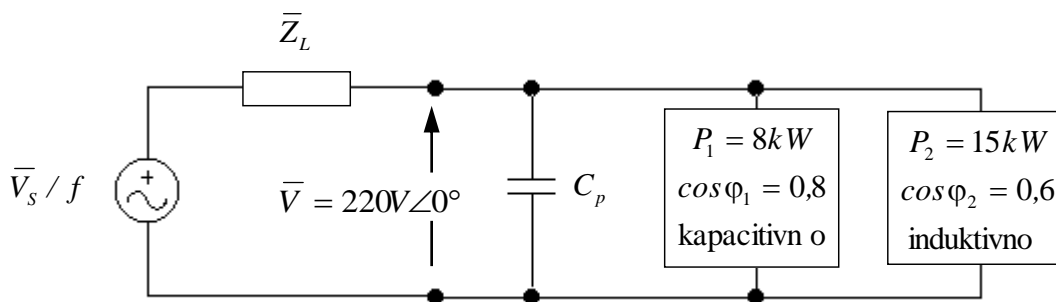
$$Q = \operatorname{Im}\{\bar{S}\} = 0 \text{ VAr},$$

a prividna snaga izvora:

$$S = |\bar{S}| = 12100 \text{ VA} = 12,1 \text{ kVA}.$$

**5.6.** U kolu na slici generator naizmeničnog napona  $\bar{V}_s$  učestanosti  $f = 50 \text{ Hz}$  napaja dva industrijska potrošača sa karakteristikama kao na slici 5.6.1, preko napojnog voda impedanse  $\bar{Z}_L = (0,1 + j0,2) \Omega$ . Na krajevima voda priključena je baterija kondenzatora  $C_p$  za korekciju faktora snage.

- a) Smatrajući da je  $C_p = 0 \text{ F}$ , naći napon i prividnu snagu izvora  $(\bar{V}_s, S_s)$  tako da je na krajevima voda obezbeđen napon  $\bar{V} = 220 \text{ V} \angle 0^\circ$ . Naći i stepen korisnog dejstva sistema.
- b) Odrediti vrednost  $C_p$  tako da se obezbedi da je faktor snage celog sistema  $\cos \varphi = 0,95$  induktivno. Za tako odabran  $C_p$  naći prividnu snagu izvora.

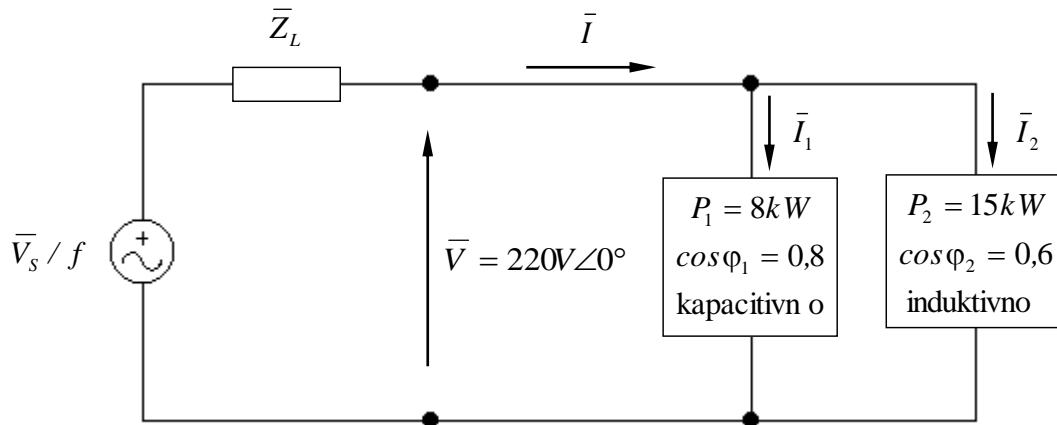


Slika 5.6.1.

**Rešenje:**

- a) Ako je kapacitet kondenzatora  $C_p = 0 \text{ F}$ , možemo smatrati da njegova ekvivalentna impedansa beskonačno velika odnosno da kondenzatora u kolu nema. Ekvivalentna električna šema za ovaj slučaj data je na slici 5.6.2.

Da bismo našli napon i prividnu snagu izvora odredimo kompleksne snage oba priključena potrošača.



Slika 5.6.2.

Aktivne snage oba potrošača su:

$$P_1 = V \cdot I_1 \cdot \cos \varphi_1,$$

$$P_2 = V \cdot I_2 \cdot \cos \varphi_2,$$

gde je  $V = |\bar{V}| = 220 \text{ V}$ ,  $\cos \varphi_1 = 0,8$  i  $\cos \varphi_2 = 0,6$ . Odatle nalazimo reaktivne snage oba potrošača:

$$Q_1 = V \cdot I_1 \cdot \sin \varphi_1 = P_1 \cdot \tan \varphi_1 = P_1 \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} < 0, \text{ (kapacitivni potrošač)}$$

$$Q_2 = V \cdot I_2 \cdot \sin \varphi_2 = P_2 \cdot \tan \varphi_2 = P_2 \cdot \frac{\sin \varphi_2}{\cos \varphi_2} > 0, \text{ (induktivni potrošač).}$$

Pošto je prvi potrošač kapacitivni, argument njegove impedanse je:

$$\varphi_1 = \arccos(0,8) = \pm 36,87^\circ = \pm 0,644 [\text{rad}], \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_1 < 0,$$

dakle

$$\varphi_1 = -36,87^\circ = -0,644.$$

Zato je:

$$\sin \varphi_1 = -\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1} = -\sqrt{1 - 0,8^2} = -0,6 < 0.$$

Pošto je drugi potrošač induktivni, argument njegove impedanse je:

$$\varphi_2 = \arccos(0,6) = \pm 53,13^\circ = \pm 0,927 [\text{rad}], \quad 0 < \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2},$$

dakle

$$\varphi_2 = 53,13^\circ = 0,927,$$

pa je:

$$\sin \varphi_2 = +\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_2} = +\sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8 > 0.$$

Reaktivne snage oba potrošača možemo da izračunamo na osnovu ovih podataka:

$$Q_1 = 8kW \cdot \frac{-0,6}{0,8} = -6kVar,$$

$$Q_2 = 15kW \cdot \frac{0,8}{0,6} = 20kVar.$$

Kompleksne snage ovih potrošača su:

$$\bar{S}_1 = P_1 + j \cdot Q_1, \quad \bar{S}_2 = P_2 + j \cdot Q_2,$$

a ukupna kompleksna snaga oba potrošača je:

$$\bar{S}_0 = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = (P_1 + P_2) + j \cdot (Q_1 + Q_2) = \bar{V} \cdot \bar{I}^*,$$

odnosno:

$$\bar{S}_0 = (8kW + 15kW) + j \cdot (-6kVar + 20kVar) = (23 + j14)kVA.$$

Kompleksna efektivna vrednost struje kroz generator je:

$$\bar{I} = \left( \frac{\bar{S}_0}{\bar{V}} \right)^* = \frac{(P_1 + P_2) - j \cdot (Q_1 + Q_2)}{\bar{V}^*},$$

odnosno:

$$\bar{I} = \frac{23kVA - j \cdot 14kVA}{220V} = \left( \frac{1150}{11} - j \frac{700}{11} \right) A \cong (104,55 - j63,64)A.$$

Njena efektivna vrednost je:

$$I = |\bar{I}| = \sqrt{\left( \frac{1150}{11} \right)^2 + \left( -\frac{700}{11} \right)^2} A \approx 122,39[A],$$

pa je:

$$\bar{I} = \left( \frac{1150}{11} - j \frac{700}{11} \right) A \cong (104,55 - j63,64)A \cong 122,39A \angle 31,33^\circ.$$

Prema drugom Kirhofovom zakonu, kompleksna efektivna vrednost napona to jest EMS generatora je:

$$\bar{V}_s = \bar{Z}_L \cdot \bar{I} + \bar{V} = (0,1 + j0,2)\Omega \cdot \left( \frac{1150}{11} - j \frac{700}{11} \right) A + 220V,$$

pošto je  $\bar{V} = 220V \angle 0^\circ = 220V \cdot e^{j0} = 220V$  kompleksna efektivna vrednost napona na krajevima paralelne veze potrošača 1 i 2. Iz prethodne jednačine sledi da je:

$$\bar{V}_s = \left( \frac{115}{11} - j \frac{70}{11} + j \frac{230}{11} - j^2 \frac{140}{11} \right) V + 220V = \left( \frac{255}{11} + 220 + j \frac{160}{11} \right) [V] \approx (243,18 + j14,55)[V],$$

odnosno:

$$\bar{V}_s = V_s \cdot e^{j\theta_s} \approx 243,62 \cdot e^{-j0,06} [V],$$

ili:

$$\bar{V}_s = V_s \angle \theta_s \approx 243,62 V \angle 3,42^\circ.$$

Prividna snaga izvora je moduo kompleksne snage izvora, odnosno prividna snaga izvora je jednaka proizvodu efektivne vrednosti napona na krajevima izvora i efektivne vrednosti struje kroz izvor:

$$S_s = V_s \cdot I \approx 243,62 V \cdot 122,39 A \approx 29,82 [kVA].$$

Stepen korisnog dejstva sistema je odnos izlazne i ulazne snage. Izlazna snaga sistema koji je posmatran je zbir aktivnih snaga potrošača 1 i 2:

$$P_{izl} = P_1 + P_2 = 8 kW + 15 kW = 23 kW.$$

Kompleksna snaga generatora je:

$$\bar{S}_s = P_s + jQ_s = \bar{V}_s \cdot \bar{I}^*,$$

odnosno:

$$\bar{S}_s = 243,62 V \angle 3,42^\circ \cdot 122,39 A \angle 31,33^\circ \cong 29,82 kVA \angle 34,75^\circ \cong (24,5 + j17) kVA.$$

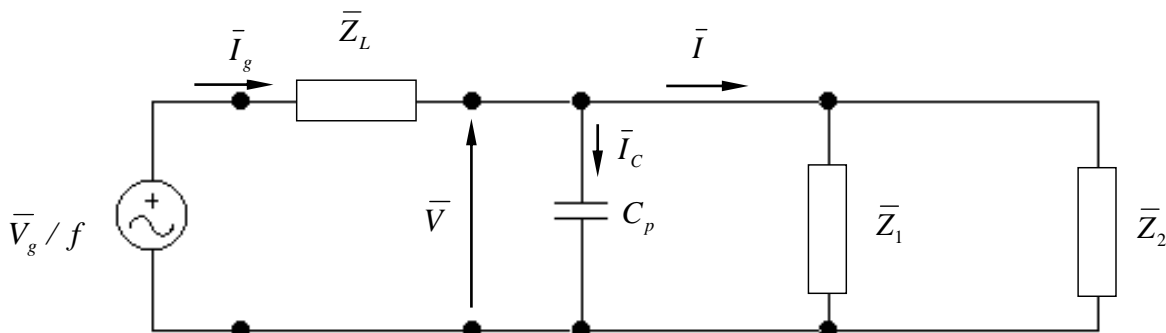
Ulazna snaga ovog sistema je aktivna snaga generatora:

$$P_s = \operatorname{Re}\{\bar{S}_s\} = \operatorname{Re}\{\bar{V}_s \cdot \bar{I}^*\} = \operatorname{Re}\{24,5 + j17\} kW = 24,5 [kW],$$

pa je stepen korisnog dejstva sistema:

$$\eta = \frac{P_{izl}}{P_{ul}} = \frac{P_{izl}}{P_s} \approx \frac{23 kW}{24,5 kW} \approx 0,9389 \approx 93,9\%.$$

b) Odredimo kapacitivnost kondenzatora tako da potrošač kojeg čine kondenzator i potrošači 1 i 2 ima induktivni karakter i da ima faktor snage  $\cos \varphi = 0,95$ . Kolo može da se predstavi kao na slici 5.6.3.



Slika 5.6.3.

Dodavanjem kondenzatora neće se promeniti aktivna snaga na izlazu sistema, pošto je aktivna snaga kondenzatora 0 W. Pre dodavanja kondenzatora faktor snage bio je:

$$\cos\varphi' = \cos\left(\arctg \frac{14}{23}\right) \cong 0,854, \text{ induktivno.}$$

Ukupna kompleksna snaga potrošača posle dodavanja kondenzatora je:

$$\bar{S} = P + j \cdot Q = \bar{S}_0 + \bar{S}_C = \bar{S}_1 + \bar{S}_2 + jQ_C = (P_1 + P_2) + j \cdot (Q_1 + Q_2 + Q_C) = \bar{V} \cdot \bar{I}_g^*.$$

Posle dodavanja kondenzatora faktor snage je popravljen:

$$\cos\varphi = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \frac{P_1 + P_2}{\sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (Q_1 + Q_2 + Q_C)^2}} = 0,95.$$

Smatramo da vrednost napona na krajevima potrošača treba da ostane ista kao pod a).

Reaktivna snaga kondenzatora je:

$$Q_C = -\omega \cdot C_p \cdot V^2 = -2\pi f \cdot C_p \cdot V^2 < 0,$$

gde je  $f = 50 \text{ Hz}$ ,  $V = 220 \text{ V}$ . Vrednost reaktivne snage kondenzatora je:

$$Q_C = \sqrt{\left(\frac{P}{\cos\varphi}\right)^2 - (P_1 + P_2)^2} - (Q_1 + Q_2),$$

odnosno:

$$Q_C = \sqrt{\left(\frac{23 \text{ kW}}{0,95}\right)^2 - (23 \text{ kW})^2} - 14 \text{ kVar} \cong -6,44 \text{ kVar}.$$

Sledi da je potrebna kapacitivnost:

$$C_p = -\frac{Q_C}{\omega \cdot V^2} = -\frac{Q_C}{2\pi f \cdot V^2},$$

odnosno, posle zamene brojnih vrednosti:

$$C_p = -\frac{-6,44 \text{ kVar}}{2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot (220 \text{ V})^2} \cong 423,55 \mu\text{F} > 0.$$

Kompleksna efektivna vrednost struje generatora je:

$$\bar{I}_g = \bar{I} + \bar{I}_C = \bar{I} + j\omega C_p \cdot \bar{V} = \bar{I} + j2\pi f \cdot C_p \cdot \bar{V},$$

odnosno:

$$\bar{I}_g = (104,55 - j63,64) \text{ A} + j2\pi \cdot 50 \text{ Hz} \cdot 423,55 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 220 \text{ V} \cong (104,55 - j34,37) \text{ A}.$$

Njena efektivna vrednost je:

$$I_g = |\bar{I}_g| = \sqrt{(104,55 \text{ A})^2 + (-34,37 \text{ A})^2} \approx 110,05 [\text{A}],$$

Prema drugom Kirhofovom zakonu, kompleksna efektivna vrednost napona to jest EMS generatora je:

$$\bar{V}_g = \bar{Z}_L \cdot \bar{I}_g + \bar{V} = (0,1 + j0,2)\Omega \cdot (104,55 - j34,37)A + 220V,$$

Iz prethodne jednačine sledi da je:

$$\bar{V}_g \approx (237,33 + j17,47)[V],$$

odnosno:

$$V_g = |\bar{V}_g| \approx 237,97[V].$$

Posle dodavanja kondenzatora potrebna je drugačija prividna snaga izvora nego pod a).

Prividna snaga izvora je sada:

$$S_g = |\bar{S}_g| = |\bar{V}_g \cdot \bar{I}_g^*| = V_g \cdot I_g,$$

a to je posle zamene brojnih vrednosti:

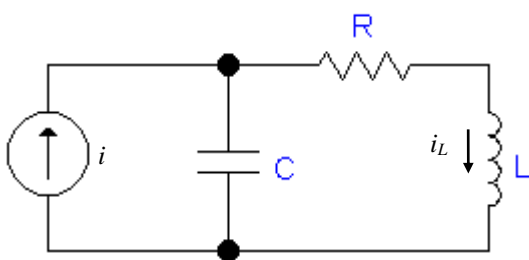
$$S_g = 237,97V \cdot 110,05A \approx 26,19[kVA],$$

dakle manja je od vrednosti dobijene pod a).

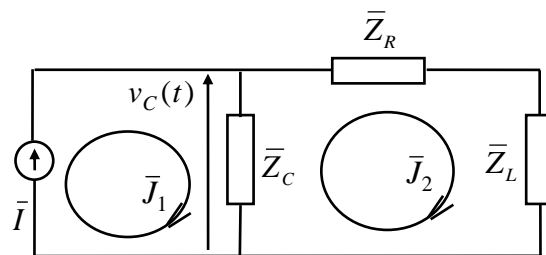
**5.7.** U kolu prikazanom na slici poznati su  $C=1[\mu F]$ ,  $R=300[\Omega]$ ,  $L=0.25[H]$  i  $i=0.1\cos(10^3t)[A]$ .

Odrediti:

- struju kroz induktivnost  $L$  u funkciji vremena
- napon na kondenzatoru  $C$  u funkciji vremena
- aktivnu, reaktivnu i prividnu snagu strujnog izvora.



Slika 5.7.1.a



Slika 5.7.1.b

**Rešenje:**

- Svaki od elemenata kola na slici 5.7.1.a predstaviće se preko kompleksne impedanse

$$\bar{Z}_R = R = 300\Omega,$$

$$\bar{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{10^3 \cdot 10^{-6}} = -j10^3 = -j1000[\Omega],$$

$$\bar{Z}_L = j\omega L = j10^3 \cdot 0.25 = j250[\Omega],$$

a struja strujnog generatora data je kompleksnim predstavnikom

$$\bar{I} = \frac{0.1}{\sqrt{2}} \angle 0^\circ [\text{A}].$$

Dalje se kolo rešava primenom metode konturnih struja:

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= \bar{I} \\ -\bar{Z}_C \bar{I} + (\bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C) \bar{J}_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\bar{J}_2 = \frac{\bar{Z}_C \bar{I}}{\bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C}, \text{ odnosno}$$

$$\bar{J}_2 = \bar{I}_L = \frac{-j1000}{300 + j(250 - 1000)} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{2}} = \frac{-j1000}{300 - j750} \cdot \frac{300 + j750}{300 + j750} \cdot \frac{0.1}{\sqrt{2}}.$$

Nakon sređivanja dobija se

$$\bar{J}_2 = \bar{I}_L = \frac{0.1238}{\sqrt{2}} \angle -21.8^\circ [\text{A}].$$

odnosno u vremenskom domenu

$$i_L(t) = 0.1238 \cos(1000t - 21.8^\circ) [\text{A}].$$

b) Napon na kondenzatoru je i napon na krajevima strujnog izvora

$$\bar{V}_C = \bar{I}_L (\bar{Z}_R + \bar{Z}_L), \text{ odnosno}$$

$$v_C(t) = 48.34 \cos(1000t + 0.314) [\text{V}].$$

c) Aktivna, reaktivna i prividna snaga strujnog izvora dobijaju se iz izraza za kompleksnu snagu

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{V}_C \bar{I}^* = \frac{48.34}{\sqrt{2}} \cdot (\cos 0.314 + j \sin 0.314) \cdot \frac{0.1}{\sqrt{2}} [\text{VA}]$$

$$\bar{S} = 2.298 + j0.746 [\text{VA}], \text{ tj.}$$

$$P = 2.298 [\text{W}],$$

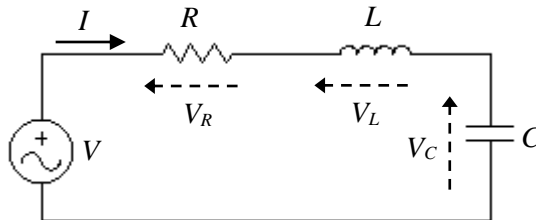
$$Q = 0.746 [\text{VAR}],$$

$$S = 2.416 [\text{VA}].$$



**5.8.** Za kolo na slici 5.8.1 dati su  $\bar{V} = 10[V]$ ,  $R = 400[\Omega]$ ,  $L = 10[mH]$ ,  $C = 10[nF]$ .

- a) Odrediti učestanost  $\omega_0$  pri kojoj u kolu nastaje rezonanca.  
 b) Za  $\omega_1 = \omega_0 / 2$ ,  $\omega_2 = \omega_0$  i  $\omega_3 = 2\omega_0$  odrediti fazore napona na otporniku, kalemu i kondenzatoru, kao i fazor struje u kolu.



**Slika 5.8.1**

**Rešenje:**

- a) Impedansa kola sa slike je

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX.$$

U slučaju kada je  $X=0$ , kolo se ponaša kao čisto rezistivno (otporničko) i struja  $I$  je u fazi sa naponom  $V$ . Kaže se da je tada u kolu nastupila rezonanca.

Rezonantna učestanost  $\omega_0$  određuje se iz uslova da je  $X=0$ , odnosno

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{ili} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Za date brojne vrednosti

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{10 \cdot 10^{-2} \cdot 10 \cdot 10^{-9}}} = 1 \cdot 10^5 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

- b) Za  $\omega_1 = \omega_0 / 2 = 10^5 / 2$

$$\bar{I} = 6.442 \angle 75,07^\circ [\text{mA}]$$

$$\bar{V}_R = 2.577 \angle 75,07^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_L = 3.221 \angle 165,07^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_C = 12.88 \angle -14,93^\circ [\text{V}]$$

Za  $\omega_2 = \omega_0 = 10^5$

$$\bar{I} = 25 \angle 0^\circ [\text{mA}]$$

$$\bar{V}_R = 10 \angle 0^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_L = 25 \angle 90^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_C = 25 \angle -90^\circ [\text{V}]$$

$$\text{Za } \omega_2 = 2\omega_0 = 2 \cdot 10^5$$

$$\bar{I} = 6.442 \angle -75,07^\circ [\text{mA}]$$

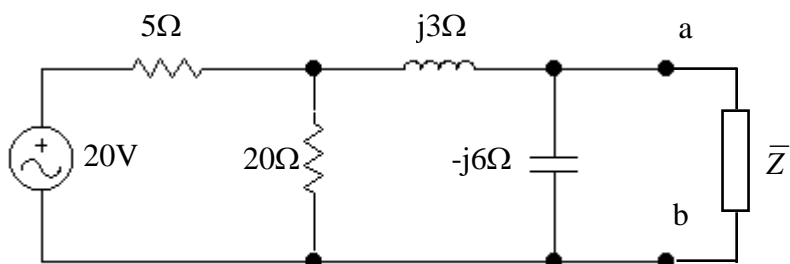
$$\bar{V}_R = 2.577 \angle -75,07^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_L = 12.88 \angle 14,93^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_C = 3,221 \angle -165,07^\circ [\text{V}]$$

**5.9.** Za kolo prikazano na slici 5.9.1 odrediti:

- Impedansu potrošača  $\bar{Z}$  tako da se na njemu razvija maksimalna aktivna snaga.
- Izračunati aktivnu snagu koja se razvija na impedansi  $\bar{Z}$  određenoj u tački a).

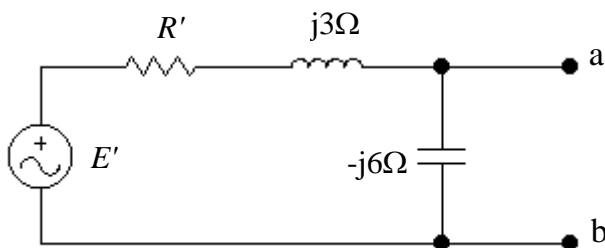


Slika 5.9.1

**Rešenje:**

a) Električno kolo na slici 5.9.1 u odnosu na granu u kojoj se nalazi potrošač nepoznate impedanse  $\bar{Z}$  moguće je zameniti ekvivalentnim Tevenenovim generatorom. Parametre  $\bar{E}_T$  i  $\bar{Z}_T$  dobićemo ekvivalentiranjem kola levo od tačaka a-b u dva koraka.

U prvom koraku ekvivalentiramo deo kola gde su izvor i otpornici od 5 i 20Ω. Ekvivalentno kolo prikazano je na slici 5.9.2.



Slika 5.9.2

Elektromotorna sila  $E'$  se dobija kao

$$E' = \frac{20[V]}{(5 + 20)[\Omega]} \cdot 20[\Omega] = 16 \angle 0^\circ [V],$$

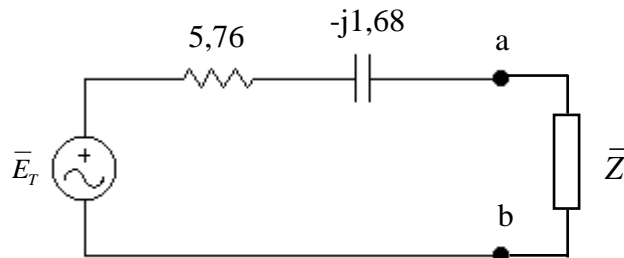
a otpornost  $R'$  je

$$R' = \frac{5 \cdot 20}{25} = 4[\Omega].$$

Dalje se parametri Tevenenovog generatora lako nalaze:

$$\bar{E}_T = \frac{16 \cdot (-j6)}{4 + j3 - j6} = 19.2 \angle -53.13^\circ [V] = (11.52 - j15.36)[V],$$

$$\bar{Z}_T = \frac{(-j6)(4 + j3)}{4 + j3 - j6} = (5.76 - j1.68)[\Omega].$$



Slika 5.9.3

Uslov da se na prijemniku razvija maksimalna aktivna snaga, poznat kao uslov prilagođenja po snazi, je

$$\bar{Z} = \bar{Z}_T^*,$$

pa je

$$\bar{Z} = (5.76 + j1.68)[\Omega].$$

b) Da bi se izračunala aktivna snaga koja se razvija na potrošaču potrebno je naći efektivnu vrednost struje u kolu na slici 5.9.3. Pošto je ukupna impedansa u kolu

$$\bar{Z}_{uk} = 5.76 - j1.68 + 5.76 + j1.68 = 11.52[\Omega],$$

efektivna vrednost struje je

$$I = \frac{19.2}{11.52} = 1.67[A],$$

pa je

$$P = 5.76 \cdot (1.67)^2 = 16[W].$$

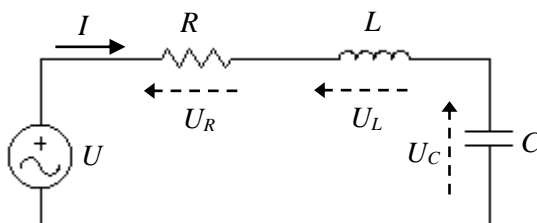
**5.10.** Kolo prikazano na slici 5.10.1 priključeno je na naizmenični napon stalne efektivne vrednosti, a promenljive učestanosti

$$u(t)=100\cos\omega t \text{ [V]}.$$

Za frekvencije  $f_1=500[\text{Hz}]$ ,  $f_2=1000[\text{Hz}]$  i  $f_3=1500[\text{Hz}]$  izračunati:

- Trenutne vrednosti struja u kolu.
- Efektivne vrednosti napona na otporniku, kalemu i kondenzatoru.

Brojni podaci  $R=10[\Omega]$ ,  $L=15.915[\text{mH}]$  i  $C=1.5915[\mu\text{F}]$ .



**Slika 5.10.1.**

### Rešenje:

Ako se napon  $u(t)$  predstavi u kompleksnom domenu

$$\bar{U} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{100}{\sqrt{2}},$$

struja  $i(t)$  u kolu u kompleksnom domenu je

$$\bar{I} = \frac{\bar{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{100}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}.$$

Za  $f_1=500\text{Hz}$  dobija se

$$\omega_1 L = 2\pi f_1 L \approx 50\Omega,$$

$$\frac{1}{\omega_1 C} = \frac{1}{2\pi f_1 C} \approx 200\Omega.$$

Primetimo da je  $f_2=2f_1$  i  $f_3=3f_1$  odnosno, može se pisati  $f_n=nf_1$ . U ovoj notaciji, trenutna vrednost struje u kolu je

$$i_n(t) = \frac{10}{\sqrt{1 + \left(5n - \frac{20}{n}\right)^2}} \cdot \cos\left(1000\pi n t - \arctg\left(5n - \frac{20}{n}\right)\right),$$

a naponi na pojedinačnim elementima su

$$u_{Rn}(t) = 10i_n(t),$$

$$u_{Ln}(t) = \frac{500n}{\sqrt{1 + \left(5n - \frac{20}{n}\right)^2}} \cdot \cos\left(1000n\pi t + \frac{\pi}{2} - \arctg\left(5n - \frac{20}{n}\right)\right)$$

$$u_{Cn}(t) = \frac{2000}{n \cdot \sqrt{1 + \left(5n - \frac{20}{n}\right)^2}} \cdot \cos\left(1000n\pi t - \frac{\pi}{2} - \arctg\left(5n - \frac{20}{n}\right)\right)$$

pri čemu je  $n=1,2,3$ .

Uvodeći sledeće izraze kao opšte za traženu struju i napone:

$$i_n(t) = \sqrt{2} \cdot I_n \cos(1000\pi t + \psi_n)$$

$$U_{Rn}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{Rn} \cos(1000\pi t + \theta_{Rn})$$

$$U_{Ln}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{Ln} \cos(1000\pi t + \theta_{Ln})$$

$$U_{Cn}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{Cn} \cos(1000\pi t + \theta_{Cn})$$

vidi se da je za različite vrednosti  $n$  ( $n=1,2,3$ ) potrebno izračunati efektivne vrednosti i argumente tražene struje i napona. Tako, za

$n=1$

$$I_1 = 470[mA], \psi_1 = 86.1^\circ$$

$$U_{R1} = 4.7[V], \theta_{R1} = \psi_1 = 86.1^\circ$$

$$U_{L1} = 23.5[V], \theta_{L1} = 176.1^\circ$$

$$U_{C1} = 94[V], \theta_{C1} = -3.9^\circ$$

$n=2$

$$I_2 = 7.09[A], \psi_2 = 0$$

$$U_{R2} = 70.9[V], \theta_{R2} = \psi_2 = 0$$

$$U_{L2} = 709[V], \theta_{L2} = 90^\circ$$

$$U_{C2} = 709[V], \theta_{C2} = -90^\circ$$

$n=3$

$$I_3 = 844[mA], \psi_3 = -83.1^\circ$$

$$U_{R3} = 8.42[V], \theta_{R3} = \psi_3 = -83.1^\circ$$

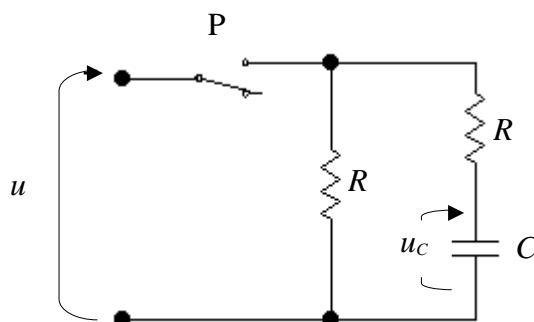
$$U_{L3} = 126.3[V], \theta_{L3} = 6.9^\circ$$

$$U_{C3} = 56.2[V], \theta_{C3} = 96.9^\circ$$

**5.11.** Kolo prikazano na slici priključeno je na prostoperiodični napon  $u = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$ . Pri zatvorenom prekidaču P uspostavljen je stacionarni režim naizmeničnih struja. Brojni podaci:  $U = 110V$ ,  $f = 60Hz$ ,  $R = 1k\Omega$ .

a) Odrediti kapacitivnost  $C$  tako da efektivna vrednost struje kroz otpornik  $R$  bude dva puta veća od efektivne vrednosti struje kroz rednu vezu kondenzatora  $C$  i otpornika  $R$ . Odrediti zatim trenutnu vrednost napona na kondenzatoru.

b) U trenutku  $t = 0$  otvori se prekidač P. Odrediti napon na kondenzatoru nakon otvaranja prekidača, kao i elektrostatičku energiju tokom ove prelazne pojave. Napon na kondenzatoru i elektrostatičku energiju predstaviti grafički za  $-\infty < t < \infty$ .



### Rezultat:

a)

$$C = \frac{1}{\sqrt{3} \cdot 2\pi f \cdot R} \approx 1,53[\mu F]$$

$$u_C = u_C(t) = \frac{U\sqrt{6}}{2} \cdot \cos\left(2\pi f \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) \approx 134,72 \cdot \cos\left(376,99 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) [\text{V}]$$

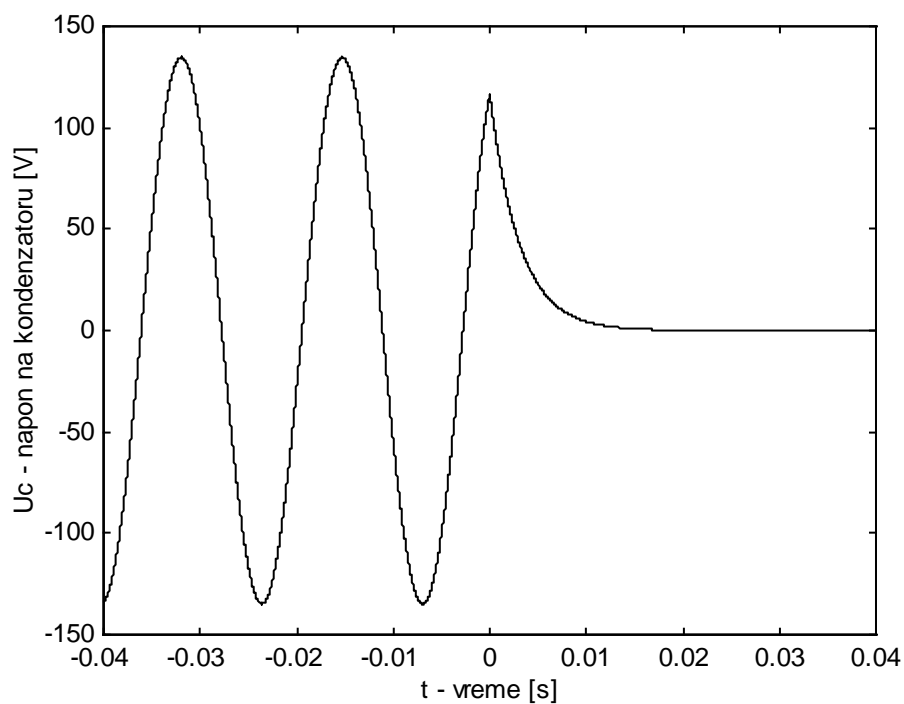
b)

$$u_C = u_C(t) = \begin{cases} \frac{U\sqrt{6}}{2} \cdot \cos\left(2\pi f \cdot t - \frac{\pi}{6}\right), & \text{za } t \leq 0 \\ u_C(0) \cdot e^{-\frac{t}{2RC}}, & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

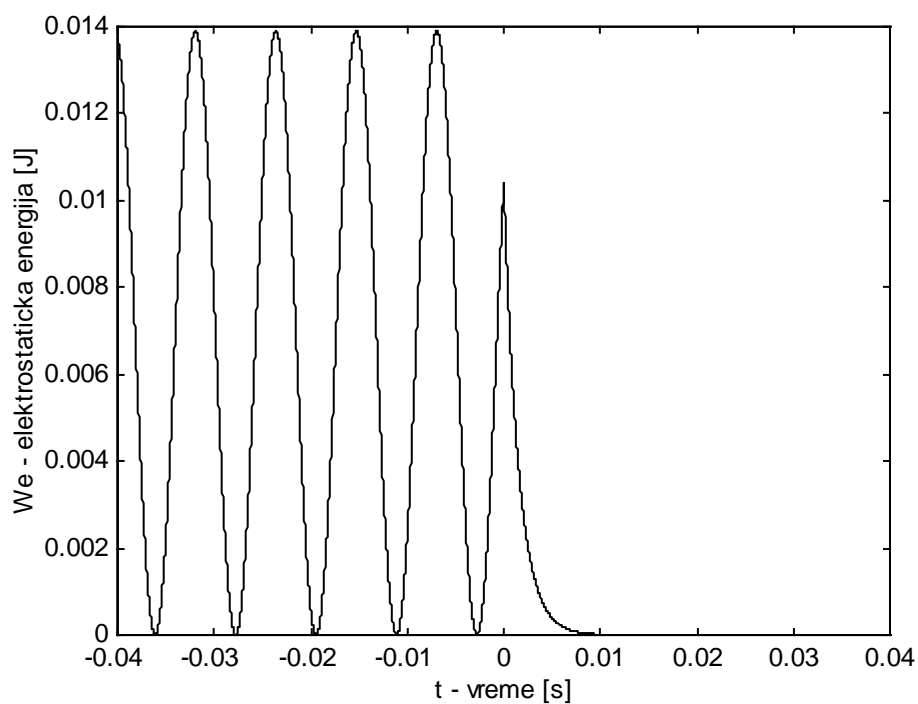
$$u_C = u_C(t) \approx \begin{cases} 134,72 \cdot \cos\left(377 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{6}\right) [\text{V}], & \text{za } t \leq 0 \\ 116,67 \cdot e^{-\frac{t}{3,06\text{ms}}} [\text{V}], & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

$$W_e = W_e(t) = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2 = \begin{cases} \frac{3}{8} C U^2 \cdot \left[1 + \cos\left(4\pi f \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)\right], & \text{za } t \leq 0 \\ \frac{1}{2} C \cdot u_C^2(0) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}, & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$

$$W_e = W_e(t) = \frac{1}{2} C \cdot u_c^2 \approx \begin{cases} 6,94 \cdot \left[ 1 + \cos \left( 754 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t - \frac{\pi}{3} \right) \right] [\text{mJ}], & \text{za } t \leq 0 \\ 10,41 \cdot e^{-\frac{t}{1,53 \text{ms}}} [\text{mJ}], & \text{za } t \geq 0 \end{cases}$$



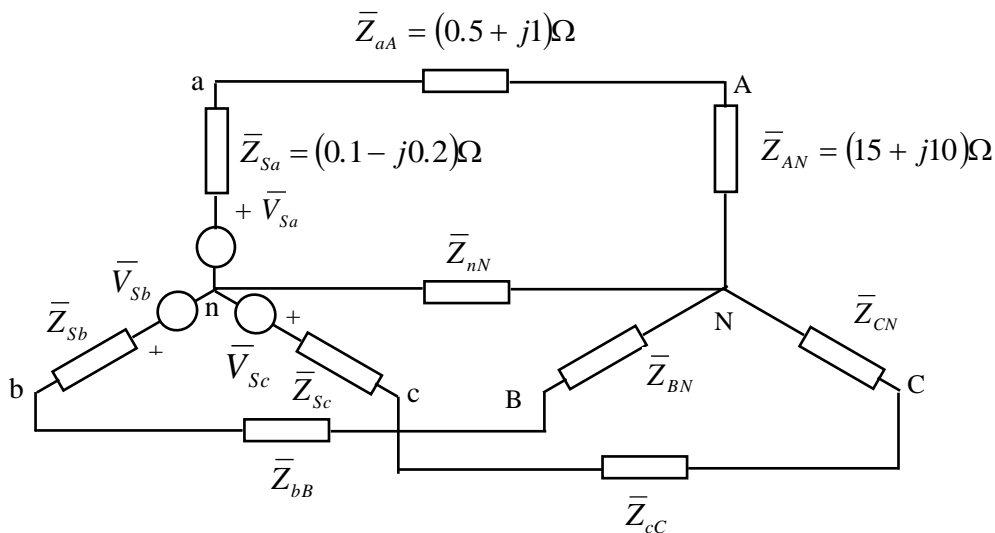
**Slika 5.11.1.** Napon na kondenzatoru  $u_c$  tokom vremena



**Slika 5.11.2.** Elektrostatička energija kondenzatora  $W_e$  tokom vremena

**5.12.** Uravnotežen, direktan trofazni Y-Y sistem, prikazan na slici 5.12.1 sastoji se od generatora čija efektivna vrednost faznog napona iznosi 120 [V], impedanse namotaja statora  $\bar{Z}_s = (0.1 - j0.2)[\Omega]$ , opterećenja čija je impedansa u svakoj fazi  $(15 + j10)[\Omega]$  i voda impedanse  $(0.5 + j1)[\Omega]$ . Odrediti:

- Fazore struja  $\bar{I}_{aA}, \bar{I}_{bB}, \bar{I}_{cC}$ ,
- Fazore napona  $\bar{V}_{AN}, \bar{V}_{BN}, \bar{V}_{CN}$ ,
- Fazore napona  $\bar{V}_{aN}, \bar{V}_{bN}, \bar{V}_{cN}$ ,
- Linijske napone  $\bar{V}_{AB}, \bar{V}_{CA}, \bar{V}_{BC}$  opterećenja,
- Linijske napone izvora  $\bar{V}_{ab}, \bar{V}_{ca}, \bar{V}_{bc}$ .



Slika 5.12.1.

**Rešenje:**

- a) Kod uravnoteženog trofaznog sistema važi:

$$\bar{V}_N = 0$$

$$\bar{V}_n = 0$$

pa je zbog toga i  $\bar{I}_{nN} = 0$ .

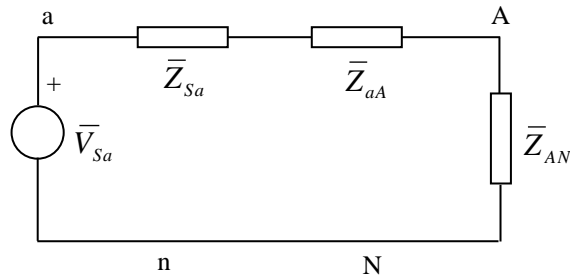
Uravnoteženi trofazni sistem može se posmatrati kao tri monofazna sistema, međusobno fazno pomerena za  $2\pi/3$ .

Posmatrajmo jedan od ta tri sistema, prikazan na slici 5.12.2.

Ukupna impedansa u kolu na slici 5.12.2. je

$$\bar{Z}_\Phi = \bar{Z}_{Sa} + \bar{Z}_{aA} + \bar{Z}_{AN} = 0.1 + j0.2 + 0.5 + j1 + 15 + j10 = 15.6 + j11.2$$





Slika 5.12.2.

Ako se dalje uzme da je  $\bar{V}_{Sa} = V_p \angle 0^\circ = 120V \angle 0^\circ$ , fazori struje u vodovima se lako nalaze

$$\bar{I}_{aA} = \frac{\bar{V}_{Sa}}{\bar{Z}_\Phi} = \frac{120}{15.6 + j11.2} = 6.249 \angle -35.68^\circ [\text{A}],$$

$$\bar{I}_{bB} = 6.249 \angle -155.68^\circ [\text{A}] \text{ i}$$

$$\bar{I}_{cC} = 6.249 \angle 84.32^\circ [\text{A}].$$

b) Naponi  $\bar{V}_{AN}, \bar{V}_{BN}, \bar{V}_{CN}$  lako se računaju

$$\bar{V}_{AN} = \bar{Z}_{AN} \bar{I}_{aA} = 112.6 \angle -1.99^\circ [\text{V}],$$

$$\bar{V}_{BN} = \bar{Z}_{BN} \bar{I}_{bB} = 112.6 \angle -121.9^\circ [\text{V}] \text{ i}$$

$$\bar{V}_{CN} = \bar{Z}_{CN} \bar{I}_{cC} = 112.6 \angle 118.01^\circ [\text{V}].$$

c) Naponi  $\bar{V}_{aN}, \bar{V}_{bN}, \bar{V}_{cN}$  su

$$\bar{V}_{an} = 120 \angle 0^\circ - (0.1 + j0.2) 6.249 \angle -35.68^\circ = 118.8 \angle -0.31^\circ [\text{V}],$$

$$\bar{V}_{bn} = 118.8 \angle -120.31^\circ [\text{V}] \text{ i}$$

$$\bar{V}_{cn} = 118.8 \angle 119.69^\circ [\text{V}].$$

d) Linijski naponi opterećenja su

$$\bar{V}_{AB} = \sqrt{3} \bar{V}_{AN} \angle 30^\circ = \sqrt{3} 112.6 \angle -1.99^\circ \angle 30^\circ = 195 \angle 28.01^\circ [\text{V}],$$

$$\bar{V}_{BC} = 195 \angle -91.99^\circ [\text{V}] \text{ i}$$

$$\bar{V}_{CA} = 195 \angle 148.01^\circ [\text{V}].$$

e) Linijski naponi izvora su

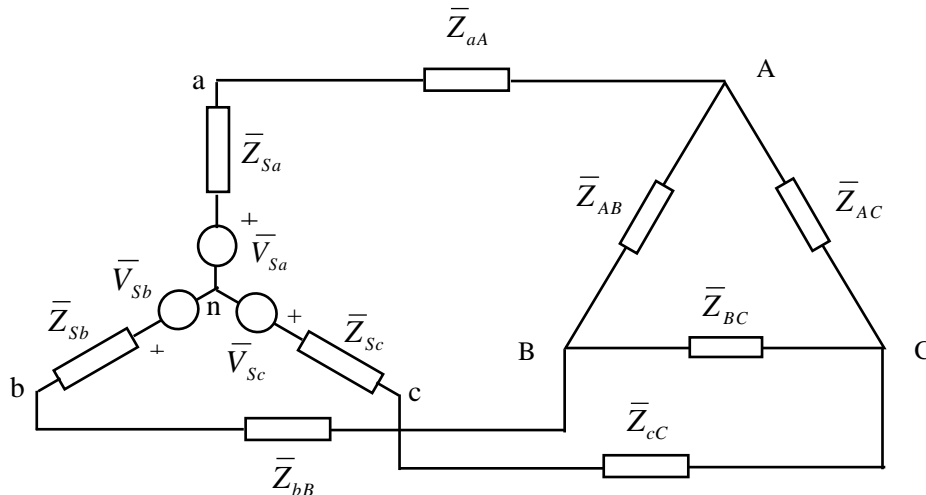
$$\bar{V}_{ab} = \sqrt{3} \bar{V}_{an} \angle 30^\circ = \sqrt{3} 118.8 \angle -0.31^\circ \angle 30^\circ = 205.8 \angle 29.69^\circ [\text{V}],$$

$$\bar{V}_{bc} = 205.8 \angle -90.31^\circ [\text{V}] \text{ i}$$

$$\bar{V}_{ca} = 205.8 \angle 149.69^\circ [\text{V}].$$

**5.13.** Uravnoteženi trofazni Y- $\Delta$  sistem direktnog redosleda prikazan je na slici. Efektivna vrednost napona generatora je 120 [V], impedansa namotaja statora  $\bar{Z}_{Sa} = (0.2 + j0.3)[\Omega]$ , impedansa opterećenja  $\bar{Z}_{AB} = (90 + j60)[\Omega]$  i impedansa voda je  $\bar{Z}_{aA} = (1 + j2)[\Omega]$ . Odrediti:

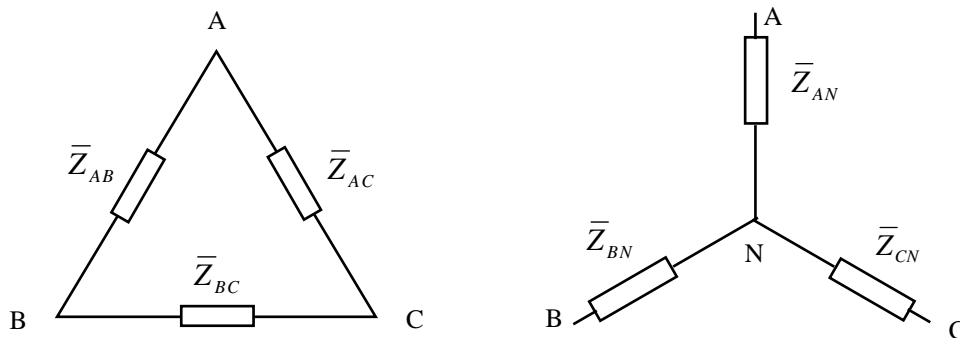
- Struje u vodovima  $\bar{I}_{aA}, \bar{I}_{bB}, \bar{I}_{cC}$  u fazorskom obliku,
- Fazore struja kroz opterećenja  $\bar{I}_{AB}, \bar{I}_{BC}, \bar{I}_{CA}$ ,
- Fazore napona na opterećenju  $\bar{V}_{AB}, \bar{V}_{BC}, \bar{V}_{CA}$ .



Slika 5.13.1.

### Rešenje:

Da bi se zadatak jednostavnije rešio trougao opterećenja transfigurisao se u zvezdu.



Transfiguracija  $\Delta$ -Y izvršio se korišćenjem sledećih transfiguracionih formula

$$\bar{Z}_{AN} = \frac{\bar{Z}_{AC} \bar{Z}_{AB}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{AC}}$$

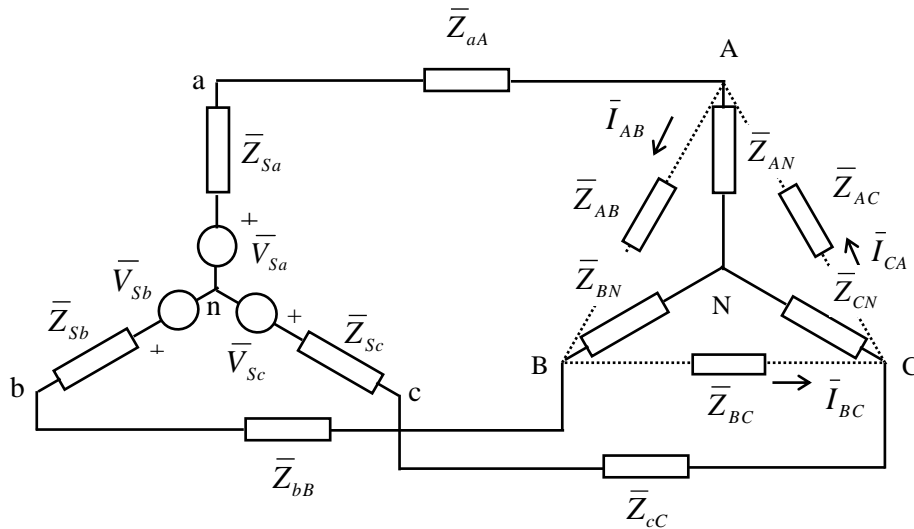
$$\bar{Z}_{BN} = \frac{\bar{Z}_{AB} \bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{AC}}$$

$$\bar{Z}_{CN} = \frac{\bar{Z}_{AC} \bar{Z}_{BC}}{\bar{Z}_{AB} + \bar{Z}_{BC} + \bar{Z}_{AC}}.$$

Radi podsećanja, mada ta transfiguracija nije od interesa u ovom slučaju, transfiguracione formule za transfiguraciju Y- $\Delta$  su

$$\begin{aligned}\bar{Z}_{AB} &= \frac{\bar{Z}_{AN}\bar{Z}_{BN} + \bar{Z}_{BN}\bar{Z}_{CN} + \bar{Z}_{CN}\bar{Z}_{AN}}{\bar{Z}_{CN}} \\ \bar{Z}_{BC} &= \frac{\bar{Z}_{AN}\bar{Z}_{BN} + \bar{Z}_{BN}\bar{Z}_{CN} + \bar{Z}_{CN}\bar{Z}_{AN}}{\bar{Z}_{AN}} \\ \bar{Z}_{AC} &= \frac{\bar{Z}_{AN}\bar{Z}_{BN} + \bar{Z}_{BN}\bar{Z}_{CN} + \bar{Z}_{CN}\bar{Z}_{AN}}{\bar{Z}_{BN}}.\end{aligned}$$

Primenom transfiguracije opterećenja  $\Delta$ -Y zadatak se znatno pojednostavljuje,



**Slika 5.13.2.**

$$\bar{Z}_{AN} = \bar{Z}_{BN} = \bar{Z}_{CN} = \frac{90 + j60}{3} = (30 + j20)[\Omega]$$

pa se dalje zadatak slično rešava kao zadatak broj 5.12.

$$\text{a) } \bar{I}_{aA} = \frac{120}{0.2 + j0.3 + 1 + j2 + 30 + j20} = \frac{120}{31.2 + j22.3} = 3.129 \angle -35.56^\circ [\text{A}].$$

$$\bar{I}_{bB} = 3.129 \angle -155.56^\circ [\text{A}].$$

$$\bar{I}_{cC} = 3.129 \angle 84.44^\circ [\text{A}].$$

b) Na osnovu I Kirhofovog zakona važi

$$\bar{I}_{aA} = \bar{I}_{AB} - \bar{I}_{CA} \Rightarrow \bar{I}_{aA} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) \bar{I}_{AB}$$

$$\bar{I}_{bB} = \bar{I}_{BC} - \bar{I}_{AB} \Rightarrow \bar{I}_{bB} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) \bar{I}_{BC}$$

$$\bar{I}_{cC} = \bar{I}_{CA} - \bar{I}_{BC} \Rightarrow \bar{I}_{cC} = (\sqrt{3} \angle -30^\circ) \bar{I}_{CA}$$

pa se dalje dobija

$$\bar{I}_{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \bar{I}_{aA} \angle 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} 3.129 \angle -35.56^\circ \angle 30^\circ = 1.807 \angle -5.56^\circ [\text{A}]$$

$$\bar{I}_{BC} = 1.807 \angle -125.56^\circ [\text{A}]$$

$$\bar{I}_{CA} = 1.807 \angle 114.44^\circ [\text{A}].$$

c) Korišćenjem Omovog zakona

$$\bar{V}_{AB} = \bar{Z}_{AB} \bar{I}_{AB} = (90 + j60) 1.807 \angle -5.56^\circ = 195.5 \angle 28.14^\circ [\text{V}]$$

$$\bar{V}_{BC} = 195.5 \angle -91.86^\circ [\text{V}]$$

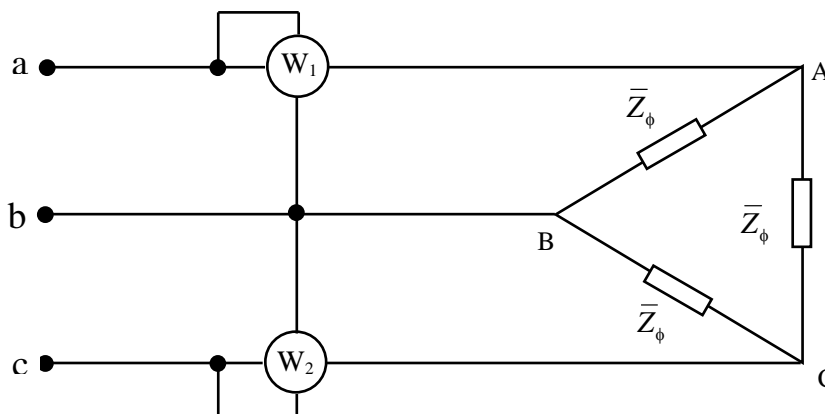
$$\bar{V}_{CA} = 195.5 \angle 148.14^\circ [\text{V}].$$

**5.14.** Na slici 5.14.1. je prikazano merenje snage potrošača vezanog u trougao u trofaznom trožičnom sistemu direktnog redosleda. Ako je efektivna vrednost linijskog napona  $U_l = 220 [\text{V}]$ , odrediti pokazivanja vatmetara kao i ukupnu aktivnu i reaktivnu snagu potrošača, ako je:

a)  $\bar{Z}_\phi = (30 + j40) [\Omega]$ ,

b)  $\bar{Z}_\phi = (30 - j40) [\Omega]$ ,

c)  $\bar{Z}_\phi = 50 [\Omega]$ .



Slika 5.14.1.

**Rešenje:**

Označavajući da je  $|U_{AB}| = |U_{BC}| = |U_{CA}| = U_L$  pokazivanje prvog vatmetra  $W_1$  je

$$P_{AB} = |U_{AB}| |I_{aA}| \cos \angle(\bar{U}_{AB}, \bar{I}_{aA}) = U_L I_L \cos \angle(\bar{Z}_\phi \bar{I}_{AB}, \bar{I}_{aA}) = U_L I_L \cos \angle(\Phi_\phi + \angle \bar{I}_{AB} - \angle \bar{I}_{aA})$$

Kako je u prethodnom zadatku pokazano

$$\angle \bar{I}_{aA} = \angle \bar{I}_{AB} - 30^\circ.$$

Prema tome

$$\Phi_\Phi + \angle \bar{I}_{AB} - \angle \bar{I}_{aA} = \Phi_\Phi + 30^\circ,$$

pri čemu je  $\Phi_\Phi$  argument impedanse opterećenja.

Dalje je

$$P_{AB} = U_L I_L \cos(\Phi_\Phi + 30^\circ).$$

Moduo linijske struje je

$$I_L = \frac{U_L}{Z_\Phi} = 4.4[A], \text{ a } \Phi_\Phi = \arctg\left(\frac{40}{30}\right) = 53.13^\circ,$$

pa je

$$P_{AB} = 220 \cdot 4.4 \cdot \cos(53.13^\circ + 30^\circ) = 115.8[W].$$

Na isti način dobija se očitavanje drugog vatmetra:

$$P_{CB} = |U_{CB}| |I_{cC}| \cos \angle (\bar{U}_{CB}, \bar{I}_{cC}) = U_L I_L \cos(\angle \bar{Z}_\Phi \bar{I}_{CB} - \angle \bar{I}_{cC}) = U_L I_L \cos(\Phi_\Phi + \angle I_{CB} - \angle I_{cC})$$

Pošto se radi o uravnoteženom sistemu struja

$$\angle \bar{I}_{CB} = \angle \bar{I}_{BC} \pm 180^\circ = \angle \bar{I}_{CA} + 120^\circ \pm 180^\circ = \angle \bar{I}_{CA} - 60^\circ.$$

Pošto je

$$\angle \bar{I}_{cC} = \angle \bar{I}_{CA} - 30^\circ,$$

onda je

$$\begin{aligned} \Phi_\Phi + \angle I_{CB} - \angle I_{cC} &= \Phi_\Phi + \angle I_{CA} \\ &- 60^\circ - (\angle I_{CA} - 30^\circ) = \Phi_\Phi - 30^\circ \end{aligned}$$

pa je

$$P_{CB} = U_L I_L \cos(\Phi_\Phi - 30^\circ).$$

Zamenom brojnih vrednosti dobija se

$$P_{CB} = 220 \cdot 4.4 \cdot \cos(53.13^\circ - 30^\circ) = 890.2[W].$$

Zbir očitavanja oba vatmetra je

$$P_{AB} + P_{CB} = U_L I_L [\cos(\Phi_\Phi + 30^\circ) + \cos(\Phi_\Phi - 30^\circ)].$$

Primenom adicijonih formula dobija se

$$P_{AB} + P_{CB} = \sqrt{3} \cdot U_L I_L \cos \Phi_\Phi,$$

što predstavlja ukupnu aktivnu snagu.

Prema tome

$$P = P_{AB} + P_{CB} = 1006[W].$$

Ako bi se sada našla razlika očitavanja vatmetara

$$P_{CB} - P_{AB} = U_L I_L [\cos(\Phi_\phi - 30^\circ) - \cos(\Phi_\phi + 30^\circ)] = U_L I_L \sin \Phi_\phi.$$

Poredeći sa izrazom za ukupnu reaktivnu snagu, nalazi se

$$Q = \sqrt{3} \cdot (P_{CB} - P_{AB}) = \sqrt{3} \cdot (890 - 115.8) = 1341.3[\text{VAR}].$$

Analizirajući izraz za reaktivnu snagu može se zaključiti:

- (1) Ukoliko su pokazivanja vatmetara jednaka, opterećenje (potrošač) je čisto termogeno.
- (2) Ukoliko je  $P_{CB} > P_{AB}$  opterećenje je induktivno
- (3) Ukoliko je  $P_{CB} < P_{AB}$  opterećenje je kapacitivno.

b) Ugao  $\Phi_\phi$  je sada  $-53.13^\circ$ . Koristeći postupak pokazan u tački a) dobija se

$$P_{AB} = 220 \cdot 4.4 \cdot \cos(-53.13^\circ + 30^\circ) = 890.2[\text{W}]$$

$$P_{CB} = 220 \cdot 4.4 \cdot \cos(-53.13^\circ - 30^\circ) = 115.8[\text{W}]$$

$$P = 890.2 + 115.8 = 1006[\text{W}]$$

$$Q = \sqrt{3} \cdot (115.8 - 890.2) = -1341.3[\text{VAR}].$$

c) S obzirom da je  $\Phi_\phi = 0$

$$P_{AB} = 220 \cdot 4.4 \cdot \cos 30^\circ = 838.3[\text{W}]$$

$$P_{CB} = 220 \cdot 4.4 \cdot \cos(-30^\circ) = 838.3[\text{W}]$$

$$P = 838.3 + 838.3 = 1676.6[\text{W}]$$

$$Q = 0.$$