

Do pojave elektronske teorije krajem XIX veka vladalo je uverenje da električnu struju obrazuje kretanje kontinualnog nestišljivog električnog fluida kroz provodnike, koje se odvija slično kretanju nestišljive tečnosti u cevima. **Električna struja** je statistički usmereno kretanje nosilaca naelektrisanja. Elementarna naelektrisanja (elektroni) kao nosioci električne struje u provodnicima, pored usmerenog stalno vrše i haotično termičko kretanje koje se ne smatra električnom strujom s obzirom da je srednja statistička vrednost takvog kretanja ravna nuli. **Strujno polje** je fizički prostor u kome se odvija makroskopsko statistički usmereno kretanje naelektrisanja.

Električne struje mogu se podeliti prema *nosiocima*, *uzrocima* i *vremenskoj varijaciji*. Prema *nosiocima*, struje se dele na elektronske i jonske. *Elektronske* su karakteristične za čvrste provodnike i vakuum, a u sredinama gde one postoje ne dolazi do materijalnih promena. *Jonske struje* karakteristične su za elektrolitičke rastvore. U tim sredinama pri proticanju struje nastaju hemijske promene usled aktivnog transporta supstance (elektroliza).

Prema uzrocima nastanka struje se dele na *kondukcione* (to su struje provodnosti, koje imaju najveći značaj u savremenoj elektrotehnici) i *konvekcione*. Kondukcione struje nastaju pod uticajem električnog polja u provodnoj sredini. Međutim, ako je kretanje naelektrisanja izazvano čisto mehaničkim uzrocima tako nastala struja zove se *konvekcionalna*.

Prema vremenskoj varijaciji intenziteta struje se dele na: (a) stalne jednosmerne, ili vremenski konstantne, (b) vremenski promenljive jednosmerne (aperiodične i složenoperiodične) i (c) naizmenične (aperiodične i prosto i složenoperiodične).

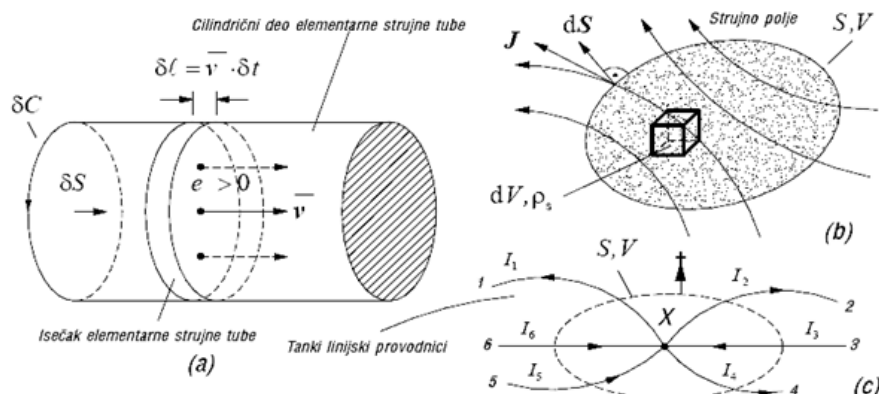
Ako je struja stacionarna, tada je makroskopska srednja brzina (tj. srednja statistička brzina) sa kojom naelektrisanja ulaze u elementarnu zapreminu oko neke tačke, jednaka brzini sa kojom je ta naelektrisanja i napuštaju. Zbog toga u linijskim provodnicima i čvorovima električnih mreža nema nagomilavanja naelektrisanja. Stacionarno strujno polje nastaje u provodnoj sredini pod dejstvom spoljašnjeg stacionarnog električnog polja, koje održava vremenski konstantnu raspodelu naelektrisanja i potencijala. Za razliku od elektrostatičkog, u stacionarnom električnom polju konstantna raspodela naelektrisanja održava se pomoću spoljašnjih električnih izvora, bez kojih bi se sistem naelektrisanih metalnih tela u provodnoj sredini spontano neutralizovao (razelektrisao).

Ako je srednja makroskopska brzina pokretljivih elementarnih naelektrisanja u svakoj tački strujnog polja nepromenljiva u vremenu, tj. ako je $\partial \bar{v} / \partial t = 0$, gde je $\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t)$, **za takvo strujno polje kaže se da je stacionarno.**

Karakteristike električne struje su: smer, intenzitet ili jačina i gustina. Intenzitet struje je skalarna algebarska veličina, koja verodostojno karakteriše strujno polje samo u tankim linijskim provodnicima. Međutim, za preciznu karakterizaciju složenog strujnog polja u svakoj njegovoj tački, u opštem slučaju potrebno je uvesti i vektor gustine struje J .

Smer električne struje u elektrotehnici odgovara **smeru kretanja pozitivnih**, a suprotan je od smera kretanja negativnih elementarnih naelektrisanja. **Trenutna vrednost (intenziteta) struje** je skalarna veličina koja se definiše kao $i=i(t)=dQ/dt$, gde je dQ fizički mala protekla količina naelektrisanja kroz površ S u fizički kratkom intervalu vremena dt . Jedinica za intenzitet struje je *Amper* [A]. Kako u pojedinim delovima površi S trenutna vrednost struje može biti veoma različita, pa čak imati i različit smer, to je jasno da intenzitet struje predstavlja veličinu pogodnu za opisivanje struja samo u tankim (žičanim) provodnicima.

Za preciznu lokalnu karakterizaciju strujnih polja uvodi se vektor gustine struje \mathbf{J} . U svakoj tački strujnog polja pravac i smer vektora \mathbf{J} poklapa se sa pravcem i smerom vektora makroskopske srednje brzine \mathbf{v} pozitivnih nosilaca naelektrisanja, a intenzitet je $J = |\mathbf{J}| = dI/dS = dQ/(dS \cdot dt)$ [A/m²].



Sl.1.

Razmotrimo električnu struju koju obrazuje kretanje pozitivnih nosilaca naelektrisanja e , zapreminske gustine (koncentracije) N i makroskopske srednje brzine \bar{v} . Na slici 1.a prikazan je isečak elementarne strujne tube (cilindra) dužine δl i poprečnog preseka δS , kroz koju se naelektrisanja kreću makroskopskom srednjom brzinom \bar{v} . Za vreme δt ona pređu put $\delta l = \bar{v} \cdot \delta t$, pa kroz svaki poprečni presek tube δS prođe količina elektriciteta $\delta Q = e \cdot N \cdot \bar{v} \delta t \cdot \delta S$. Intenzitet struje tube je $\delta I = \delta Q / \delta t = e \cdot N \cdot \bar{v} \cdot \delta S$, a njena gustina $J = \delta I / \delta S = e \cdot N \cdot \bar{v} = \rho \cdot \bar{v}$, gde je $\rho = e \cdot N$ zapreminska gustina nosilaca naelektrisanja. Pošto se po definiciji pravac i smer vektora \mathbf{J} poklapaju sa pravcem i smerom kretanja pozitivnih naelektrisanja, tada je u opštem slučaju moguće napisati $\mathbf{J} = \rho \cdot \bar{\mathbf{v}}$. Kada je u pitanju struja metalnog provodnika, $\rho = -Ne < 0$ (N je koncentracija, a \bar{v} makroskopska srednja brzina elektrona). Dakle, kod metalnih provodnika vektori gustine struje i makroskopske srednje brzine elektrona istog su pravca, a suprotnog smera.

Jednačina kontinuiteta i prvi Kirhofov zakon

Pretpostavimo da se u domenu V ograničenom zatvorenom površi S nalazi vremenski promenljiva količina slobodnih naelektrisanja q_s okarakterisana zapreminskom gustinom ρ_s (slika 1.b). Količina naelektrisanja q_s može se menjati ulaskom i izlaskom naelektrisanja iz domena V , pri čemu nastaje električna struja koju lokalno, u pojedinim tačkama strujnog polja karakteriše vektor gustine \mathbf{J} . Izlazni fluks vektora \mathbf{J} kroz zatvorenu orijentisanu površ S odgovara brzini smanjivanja količine slobodnih naelektrisanja u domenu V , tj.:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq_s}{dt} = -\frac{d}{dt} \oint_V \rho_s dV = -\oint_V \frac{d\rho_s}{dt} dV$$

jer je $q_s = \oint_V \rho_s dV$.

Kada se jednačina kontinuiteta primeni na stacionarna strujna polja ($d\rho_s/dt = 0$) dobija se:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \leftarrow \text{Integralni oblik prvog Kirhofovog zakona}$$

Integralni oblik jednačine kontinuiteta u suštini predstavlja matematički iskaz zakona o konzervaciji elektriciteta. U stacionarnom strujnom polju prostorna raspodela naelektrisanja je,

takođe, stacionarna (vremenski nepromenljiva), što znači da je brzina kojom naelektrisanja ulaze u bilo koju elementarnu zapreminu jednaka brzini sa kojom je i napuštaju. Prema prvom Kirhofovom zakonu u integralnom obliku znamo da je u svakom trenutku u stacionarnom strujnom polju ukupna jačina struje kroz proizvoljnu zatvorenu površ ravna nuli. U specijalnom slučaju strujnog polja kanalisano sa n tankih (tj. linijskih ili žičanih) provodnika koji se stiču u čvoru X neke električne mreže, a u kojima postoje struje intenziteta I_1, \dots, I_n – integralni oblik prvog Kirhofovog zakona za "domen" V ograničen sa "površ" S (sl. 1.c), odnosno integralni oblik prvog Kirhofovog zakona za čvor X – glasi:

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k = 0$$

gde se orijentacija obračunskog, odnosno referentnog smera za algebarsko sabiranje struja grana unapred *usvaja* (na sl. 1.c taj smer je orijentisan od čvora X , što je i uobičajeno u praksi, a naravno, mogao je biti usvojen i suprotni smer). Kada se referentni smer struje k -te grane I_k ($k=1, n$) i usvojeni obračunski smer poklapaju, ta struja se u sumu unosi sa predznakom "+", dok se u suprotnom unosi sa predznakom "-". Prema prethodno usvojenom referentnom smeru, za čvor X električne mreže sa slike 1.c odmah možemo napisati jednačinu po prvom Kirhofovom zakonu:

$$I_1 + I_2 - I_3 + I_4 - I_5 - I_6 = 0.$$

Dakle, struje koje ističu iz čvora uzimamo sa pozitivnim, a struje koje utiču u čvor sa negativnim predznakom pri sabiranju.

Omov zakon u lokalnom i integralnom obliku

U metalnim provodnicima pokretljivi nosioci naelektrisanja su elektroni. Kako se kod metala valentna i provodna zona preklapaju, to su elektroni u poslednjem sloju elektronskog omotača atoma metala „na raspolaganju“ za provođenje električne struje. Gustina struje u metalnom provodniku je onda $\mathbf{J} = N \cdot e \cdot \bar{\mathbf{v}}$, gde je N koncentracija „slobodnih“, tj. provodnih elektrona, $e = -1.602 \cdot 10^{-19}$ [C] naelektrisanje elektrona, a $\bar{\mathbf{v}}$ makroskopska srednja brzina elektrona. Kako je srednja brzina elektrona direktno srazmerna jačini spojašnjeg električnog polja \mathbf{E} , $\bar{\mathbf{v}} = \mu \cdot \mathbf{E}$, gde je koeficijent μ – pokretljivost elektrona, to je:

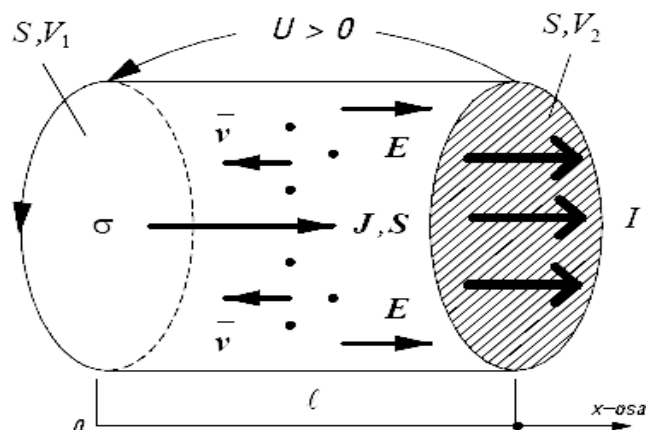
$$\mathbf{J} = N \cdot e \cdot \bar{\mathbf{v}} = N \cdot e \cdot \mu \cdot \mathbf{E} = \sigma \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\rho} \cdot \mathbf{E}.$$

Veličina $\sigma = N \cdot e \cdot \mu$, $\sigma > 0$ naziva se *specifična električna provodnost*, a njena recipročna vrednost $\rho = 1/\sigma$, $\rho > 0$ *specifična električna otpornost* metalnog provodnika. Sa porastom temperature specifična provodnost metala opada a specifična otpornost raste.

Relacija $\mathbf{J} = \sigma \cdot \mathbf{E}$ naziva se **Omov zakon u lokalnom obliku**.

Pretpostavimo da je između krajeva *žičanog linijskog provodnika* dužine l priključen vremenski konstantan napon U (sl. 3). U provodniku tada postoji homogeno električno polje \mathbf{E} i homogeno strujno polje \mathbf{J} . Intenzitet vremenski konstantne struje u provodniku je I i ona je ravnomerno raspodeljena po njegovom poprečnom preseku.

Kako je $I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S} = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{S} = \sigma E \cdot S$, a napon na krajevima posmatranog provodnika $U = E \cdot l$, jer je električno polje \mathbf{E} homogeno u provodniku to je:



Sl. 3

$$I = \sigma E \cdot S = \sigma \frac{U}{l} S, \text{ odnosno } \frac{U}{I} = R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \rho \frac{l}{S}.$$

Veličina R naziva se električna otpornost, a njena recipročna vrednost $G = 1/R = I/U$ električna provodnost (konduktansa). Jedinica za električnu otpornost je $\text{Om} [\Omega]$ i ima dimenzije $[V/A]$, a jedinica za električnu provodnost je $\text{Simens} [S]$ i dimenziono odgovara $1/[\Omega] = [A/V]$. Jedinica za specifičnu električnu otpornost je $\rho(=) [\Omega m]$, a za specifičnu električnu provodnost $\sigma(=) [S/m]$.

Relacija $I = U/R$ koja povezuje struju *linearnog provodnika* i napon između njegovih krajeva zove se **klasičan ili integralni oblik Omovog zakona**, a veličina R čija je jedinica $[\Omega]$, predstavlja *električnu otpornost* tog provodnika.

Džulov zakon

Jedna od važnijih manifestacija električne struje jeste njen toplotni efekat, tj. zagrevanje provodne sredine u kojoj postoji struja. Taj efekat zove se Džulov efekat. Kada u provodnoj sredini postoji električna struja, sile električnog polja vrše rad premeštajući naelektrisanja. Rad koji izvrše Kulonove sile u toku vremena u potpunosti se pretvori u toplotu usled interakcije nosilaca naelektrisanja sa sredinom.

Brzina sa kojom se razvija toplota u provodniku jednaka je snazi Džulovih gubitaka u provodniku:

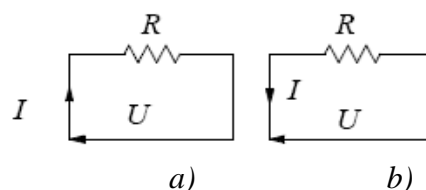
$$P = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R},$$

gde je R —otpornost provodnika, I —jačina struje u provodniku, a U —napon na krajevima provodnika. Ovaj proces je nepovratan. Jedinica za snagu je $\text{Watt} [W] (=) [J/s]$ i dimenziono odgovara $[V \cdot A]$.

Konvencija o naponu otpornika: vremenski konstantan napon U na krajevima otpornika R sa vremenski konstantnom strujom I , dat je jednom od sledećih relacija:

(a) $U = R \cdot I$ kada su **referentni smerovi** za napon i struju **usaglašeni** (sl. 4a)

(b) $U = -R \cdot I$ kada **referentni smerovi** za napon i struju **nisu usaglašeni** (sl. 4b).

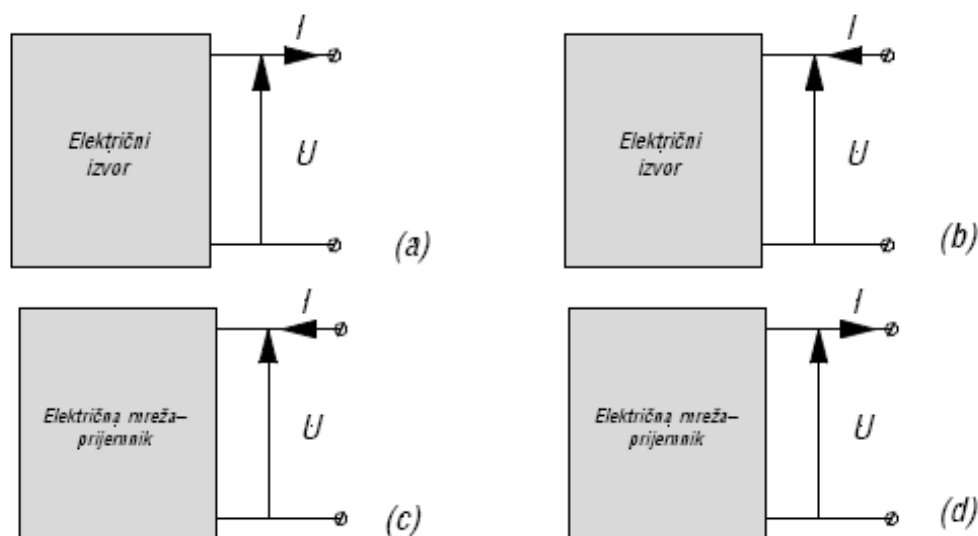


Sl. 4

Konvencija o snazi izvora i prijemnika

Neka su U i I vremenski konstantni napon i struja kao na slici 5. Tada važi sledeća konvencija

- (a) Snaga koju izvor sa sl. 5a ulaže (odaje) definisana je kao $P_u = U \cdot I$. Za referentne smerove napona i struje izvora kaže se da su usaglašeni.
- (b) Snaga koju izvor sa sl. 5b prima definisana je kao $P_p = U \cdot I$. Za referentne smerove napona i struje izvora kaže se da nisu usaglašeni.



Sl. 5

- (c) Snaga koju prijemnik na sl. 5c prima, definisana je kao $P_p = U \cdot I$. Za referentne smerove napona i struje prijemnika kaže se da su usaglašeni.
- (d) Snaga koju prijemnik na sl. 5d ulaže (odaje) definisana je kao $P_u = U \cdot I$. Za referentne smerove napona i struje prijemnika sada se kaže da nisu usaglašeni.

Primetimo da iz prethodne konvencije sledi da snage prijemnika i izvora mogu biti pozitivne, negativne ili ravne nuli. Ako je u nekom intervalu snaga koju izvor ili mreža ulažu *negativna*, tada se oni u tom intervalu ne ponašaju kao izvori, već kao prijemnici. Slično, ako je u nekom intervalu snaga koju izvor ili mreža primaju *negativna*, onda se oni u tom intervalu ne ponašaju kao prijemnici, već kao izvori.

Vezivanje otpornika u grupe. Ekvivalentna otpornost

(a) Redna (serijska) veza otpornika

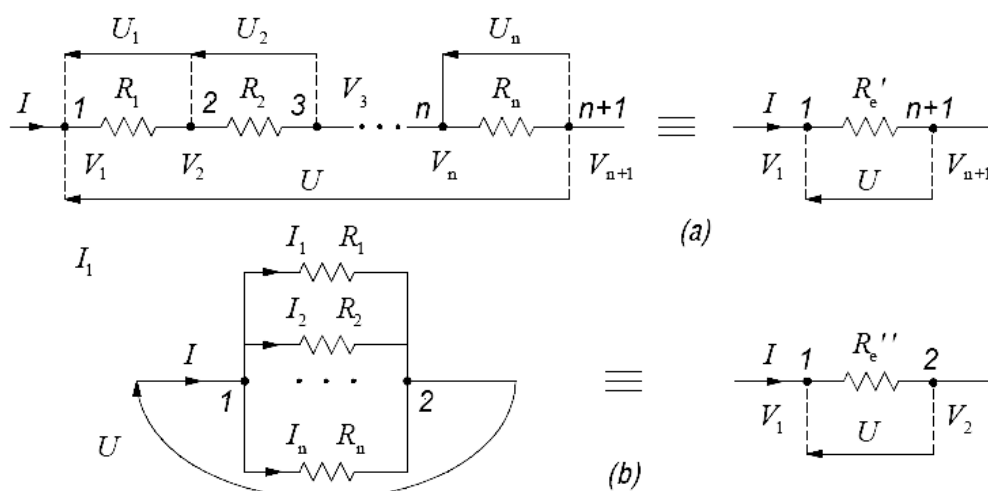
Posmatrajmo grupu od n redno vezanih otpornika (sl. 7a). Jačina struje I kroz sve otpornike je ista, a prema Omovom zakonu, napon na i -tom otporniku R_i je $U_i = R_i I$, ($i = 1, n$) pri usaglašenom smeru sa smerom struje I . Napon redne veze jednak je zbiru napona na pojedinačnim otpornicima $U = U_1 + U_2 + \dots + U_n = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$. Otpornost R_e' ekvivalentnog otpornika koji je potrebno vezati umesto redne veze n otpornika je onda

$$R_e' = U / I = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

Uočava se da je R_e' uvek veće od najveće otpornosti u rednoj vezi.

(b) Paralelna veza otpornika

Na sl. 7b prikazana je grupa od n paralelno vezanih otpornika. Po prvom Kirhofovom zakonu jačina struje I glavne grane je $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$, dok po Omovom zakonu struja otpornika R_i je $I_i = U / R_i$, ($i = 1, n$) pri usaglašenim smerovima za napon i struju. Kako je $I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = U \cdot (1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_n)$, to je *ekvivalentna otpornost* R_e'' paralelne veze,



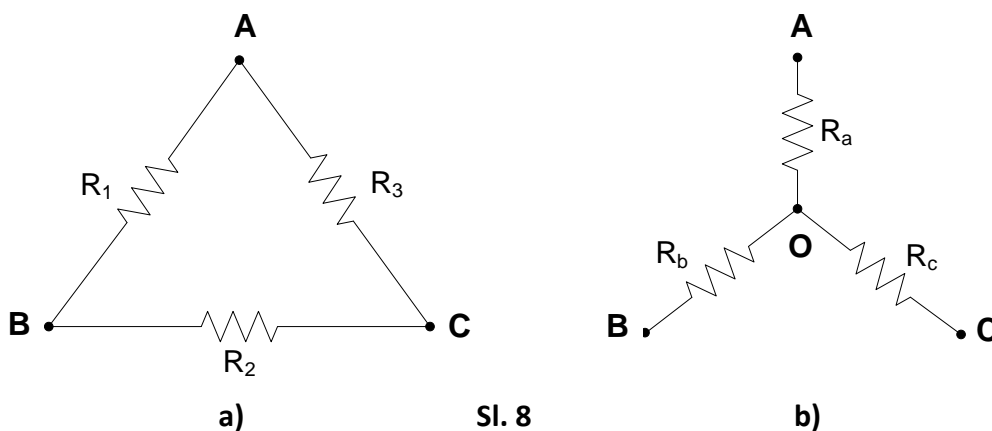
Sl. 7

$$\frac{1}{R_e'} = \frac{I}{U} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

Uočava se da je R_e'' uvek manje od najmanje otpornosti u paralelnoj vezi. Paralelna veza n otpornika označava se sa $R_e'' = R_1 || R_2 || \dots || R_n$, a u posebnom slučaju kada je $n=2$ ima se

$$R_e'' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

(c) Transfiguracija trougla u zvezdu i obrnuto



Sl. 8

Trougao otpornosti (slika 8.a) transformiše se u ekvivalentnu zvezdu (slika 8.b) primenom relacija:

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_b = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad R_c = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \leftarrow \text{transformacija } \Delta \rightarrow Y''.$$

Zvezda otpornika sa slike 8.b transformiše se u ekvivalentni trougao sa slike 8.a primenom relacija:

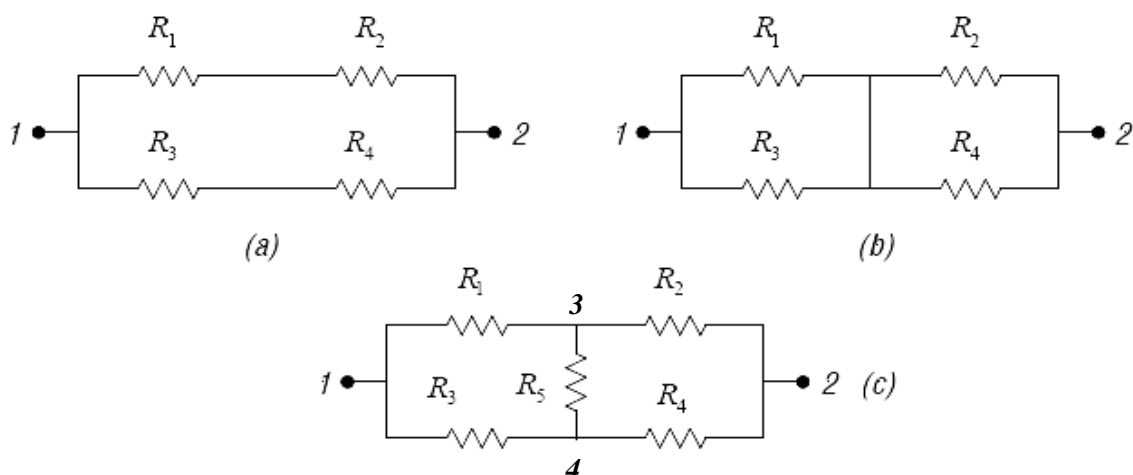
$$R_1 = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c}, \quad R_2 = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a}, \quad R_3 = R_a + R_c + \frac{R_a \cdot R_c}{R_b} \leftarrow \text{transformacija } Y \rightarrow \Delta''.$$

1. zadatak: Odrediti ekvivalentne otpornosti R_{e1} , R_{e2} i R_{e3} , između čvorova 1 i 2 mreža na slikama (a), (b) i (c), respektivno.

Rešenje:

(a) $R_{e1} = (R_1 + R_2) || (R_3 + R_4) = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$, kao kombinacija redno-paralelne veze.

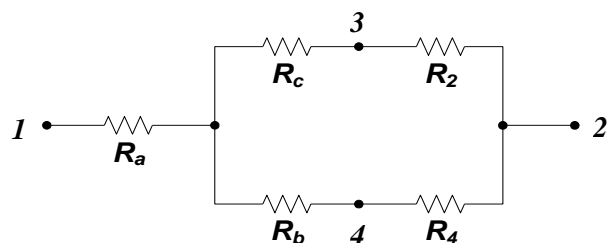
(b) $R_{e2} = (R_1 \parallel R_3) + (R_2 \parallel R_4) = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$, kao kombinacija paralelno-redne veze.



(c) Ekvivalentnu otpornost ove mreže nije moguće odrediti pomoću redno-paralelne transformacije, već se može primeniti transformacija trougla otpornika R_1 , R_3 i R_5 između čvorova 1, 3 i 4 u ekvivalentu zvezdu otpornika R_a , R_b i R_c :

$$R_a = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3 + R_5}, \quad R_b = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_1 + R_3 + R_5},$$

$$R_c = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_1 + R_3 + R_5}.$$

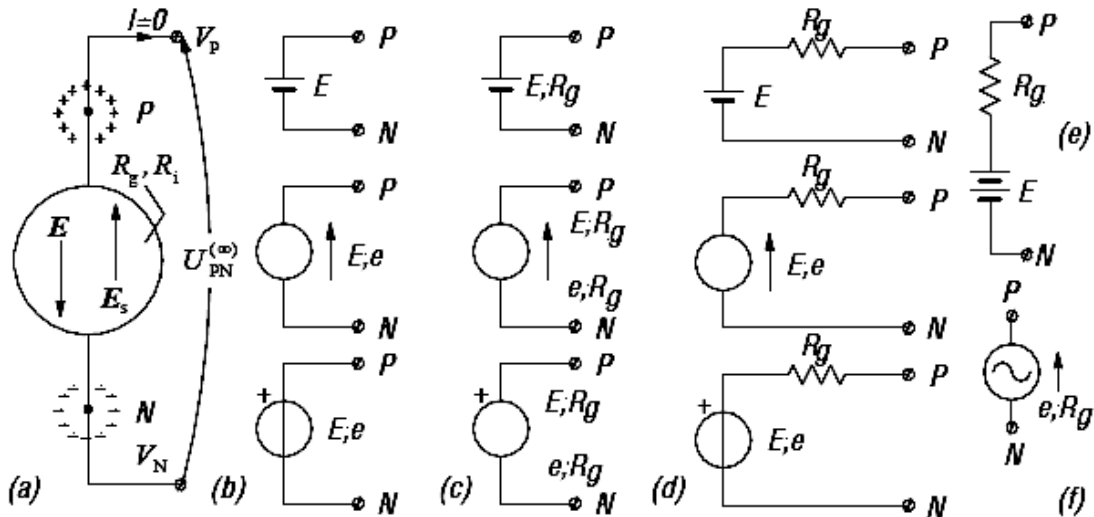


Sada je $R_{e3} = R_a + (R_c + R_2) \parallel (R_b + R_4) = R_a + \frac{(R_c + R_2)(R_b + R_4)}{R_c + R_2 + R_b + R_4}$

Električni generatori i pojam kvazilineičnog strujnog kola

U stacionarnom strujnom kolu postoje i delovi gde pored Kulonovih deluju i sile neelektrostatičkog porekla čijim se radom održava sama struja u kolu. Te sile zovemo "stranim" ili "eksternim" i one predstavljaju posrednike preko kojih se drugi vidovi energije transformišu u električni rad. Premda je poreklo stranih sila veoma različito, sve one imaju zajedničku osobinu da deluju na pokretljiva naelektrisanja i zbog toga je njihovo dejstvo *ekvivalentno* dejstvu *nekog stranog električnog polja* E_s . Strano polje je uvek lokalizovano u određenom domenu unutar generatora (sl. 9a) i ima smer od priključka na nižem potencijalu N prema priključku na višem potencijalu P . Smer stranog polja E_s kroz generator uvek je *suprotan* od smera polja E koje stvaraju stacionarna naelektrisanja raspoređena oko pozitivnog P i negativnog N priključka generatora.

Kada generator radi u *praznom hodu* tada je $I=0$ i $J=0$, pa je i $E+E_s=0$, odnosno $E=-E_s$. Sa aspekta analize električnih mreža nije važno poznavanje same prirode stranih sila u generatoru, već ponašanje generatora u odnosu na spoljašnje delove kola. Zbog toga je pogodno da se generator makroskopski opiše sledećim veličinama: (1) *elektromotornom silom*, ili skraćeno *ems*, koja se označava sa E kada je vremenski konstantna, a sa e kada je vremenski promenljiva, i (2) *unutrašnjom otpornošću* R_g ili R_i ("i"=interno).



Sl. 9

Definicija elektromotorne sile generatora. Elektromotorna sila (ems) naponskog generatora je količnik rada ΔA_g koji taj generator izvrši pri prenošenju naelektrisanja ΔQ sa negativne na pozitivnu elektrodu i samog tog naelektrisanja ΔQ – tj. $E = \Delta A_g / \Delta Q$. Rad generatora nije ništa drugo do izvršeni rad stranih sila pri prebacivanju naelektrisanja ΔQ kroz sam generator sa njegovog negativnog priključka N na pozitivan P (sl. 9a):

$$E = \frac{\Delta A_g}{\Delta Q} = \int_N^P \mathbf{E}_s d\mathbf{l}.$$

Pošto ems generatora ne zavisi od njegovog radnog režima, to se ona najlakše određuje kada generator radi u praznom hodu (tj. kada je $I=0$ i $\mathbf{E} = -\mathbf{E}_s$) (sl. 9a). Iz same definicije ems tada sledi:

$$E = \frac{\Delta A_g}{\Delta Q} = \int_N^P \mathbf{E}_s d\mathbf{l} = \int_P^N \mathbf{E} d\mathbf{l} = V_P - V_N = U_{PN}^\infty$$

gde je U_{PN}^∞ napon praznog hoda generatora koji se lako može izmeriti. Kao algebarska veličina, ems ima svoj znak u odnosu na *referentni smer* koji je uvek usmeren od negativne prema pozitivnoj elektrodi. Ako su referentni smerovi ems i struje generatora isti, za njih se tada kaže da su usaglašeni, a u suprotnom, da nisu usaglašeni. Snaga koju generator odaje jednaka je proizvodu njegove ems i struje sa usaglašenim smerovima.

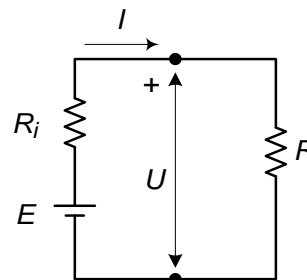
Definicija električne otpornosti generatora. Kada u generatoru postoji struja I , tada se u njemu javljaju termogeni (Džulovi) gubici, koji dovode do zagrevanja generatora. Ako je P_I snaga tih gubitaka, tada se (unutrašnja) otpornost generatora R_g definiše kao $R_g = P_I / I^2$, i često se obeležava i sa R_i . Unutrašnja otpornost generatora može se odrediti kao količnik njegovog napona praznog hoda U_{PN}^∞ i struje kratkog spoja $I^{(0)}$, tj. kao $R_g = U_{PN}^\infty / I^{(0)}$. Kada je $R_g = 0[\Omega]$ za generator se kaže da je idealan, a ako je $R_g > 0$ generator je realan.

Na sl. 9b dati su simboli za označavanje *idealnih naponskih generatora*. Prvi od njih (sl. 9b gore) odgovara elektrohemijском generatoru vremenski konstantne ems E . Duža horizontalna crtica označava pozitivan, a kraća negativan priključak generatora. Ako postoji i strelica pored simbola, ona označava napon praznog hoda generatora jednak ems E . Druga dva simbola na sl. 9b koriste se za uopšteno označavanje idealnih naponskih generatora, s tim što je referentni smer za ems

određen strelicom, ili znakom "+". Na sl. 9c, 9d, 9e i 9f dati su simboli za označavanje *realnih naponskih generatora* unutrašnje otpornosti R_g . Simbolom na sl. 9f označava se realan naponski generator prostoperiodične ems. Primećujemo da je u oznakama na sl. 9d i 9e unutrašnja otpornost generatora izdvojena kao samostalni element i vezana na red sa *idealnim naponskim generatorom*. Fizički smisao tih oznaka predstavlja čistu fikciju, s obzirom da tačka spoja idealnog generatora i otpornika R_g , ne samo što nije pristupačna, veći ne postoji.

2. zadatak Na izvor elektromotorne sile E i unutrašnjeg otpora R_i priključen je termogeni otpornik R . Odrediti:

- struju u kolu I
- napon na krajevima izvora U
- snagu koju izvor predaje spoljašnjem kolu P
- snagu termičkih gubitaka u samom izvoru P_g
- ukupnu snagu izvora P_E
- koeficijent korisnog dejstva kola η

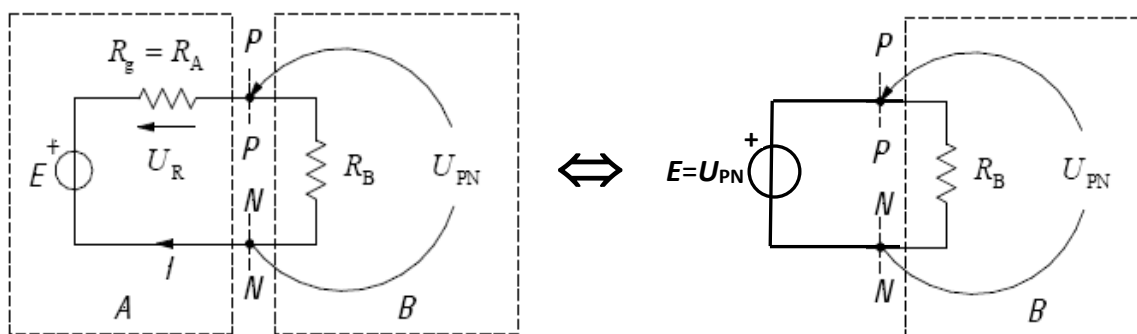


Rešenje:

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \frac{E}{R + R_i}, \quad \text{b) } U = I \cdot R = E \frac{R}{R + R_i}, \quad \text{c) } P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R} = \left(\frac{E}{R + R_i} \right)^2 R \\ \text{d) } P_g &= R_i \cdot I^2 = R_i \left(\frac{E}{R + R_i} \right)^2, \quad \text{e) } P_E = P_g + P = E \cdot I, \quad \text{f) } \eta = \frac{P}{P_g + P} = \frac{U \cdot I}{E \cdot I} = \frac{R}{R + R_i}. \end{aligned}$$

Teorema kompenzacije

Posmatrajmo odsečak A nekog kvazilinearnog strujnog kola (strujne konture) između tačaka N i P prikazan na slici 10. Na osnovu prethodnog sledi $U_{PN} = E - U_R = E - R_A \cdot I$. Napon U_{PN} u električnom pogledu predstavlja elektromotornu silu ekvivalentnu odsečku A, jer se zamenom tog



Sl. 10

odsečka idealnim naponskim generatorom elektromotorne sile U_{PN} ne menja struja I u odsečku B. Ovaj rezultat neko zove i teoremom o kompenzaciji, pošto se pomoću napona U_{PN} u potpunosti može zameniti funkcija odsečka A.

Prilagođenje prijemnika po snazi na generator (uslov prenosa maksimalne snage)

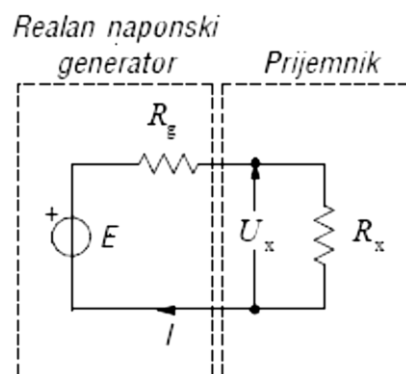
Posmatrajmo prosto kolo prikazano na sl. 11. Struja I i snaga P_x prijemnika dati su relacijama:

$$I = \frac{E}{R_g + R_x}, \quad P_x = R_x \cdot I^2 = E^2 \frac{R_x}{(R_g + R_x)^2}.$$

R_g je unutrašnja otpornost generatora na koju ne možemo uticati, osim zamenom samog generatora. Pod ovim uslovom, $P_x = f(R_x)$, pa se nakon primene diferencijalnog kriterijuma za određivanje maksimuma dobija:

$$\frac{dP_x}{dR_x} = 0, \text{ sledi } R_x = R_g.$$

Relacija $R_x = R_g$ naziva se uslov prilagođenja prijemnika po snazi generatoru, ili uslov prenosa maksimalne snage prijemniku.



Sl. 11

Pri $R_x = R_g$ dobija se $I = \frac{E}{R_g + R_g} = \frac{E}{2R_g}$, pa su snage $P_{x\max} = I^2 R_x = \frac{E^2}{4R_g}$ i $P_j = I^2 R_g = \frac{E^2}{4R_g}$.

Dakle, termička disipacija (snaga Džulovih gubitaka) u prijemniku i generatoru su jednake. Ako definišemo stepen (koeficijent) korisnog dejstva električnog kola sa slike 11 kao $\eta = P_x / P_E$, za

$$R_x = R_g \text{ dobijamo } \eta = \frac{P_x}{P_E} = \frac{I^2 R_x}{EI} = \frac{I^2 R_x}{I \cdot I(R_g + R_x)} = \frac{R_x}{R_g + R_x} = \frac{1}{2}.$$

Pri zadovoljenom uslovu prenosa maksimalne snage (tj. kada je $R_x = R_g$), dobija se da su snage Džulovih gubitaka u generatoru i prijemniku iste, a da je stepen korisnog dejstva kola jednak samo 0.5.

Omov zakon za prosto kolo: algebarski intenzitet struje kola jednak je količniku algebarske sume

$$\text{ems koje deluju u kolu i ukupne otpornosti u kolu, } I = \frac{\sum \pm E}{\sum R}.$$

Pri tome, elektromotorna sila se uzima sa pozitivnim predznakom ako je smer njene emes usaglašen sa referentnim smerom struje. Ako su smerovi struje i ems neusaglašeni algebarski predznak je „-“.

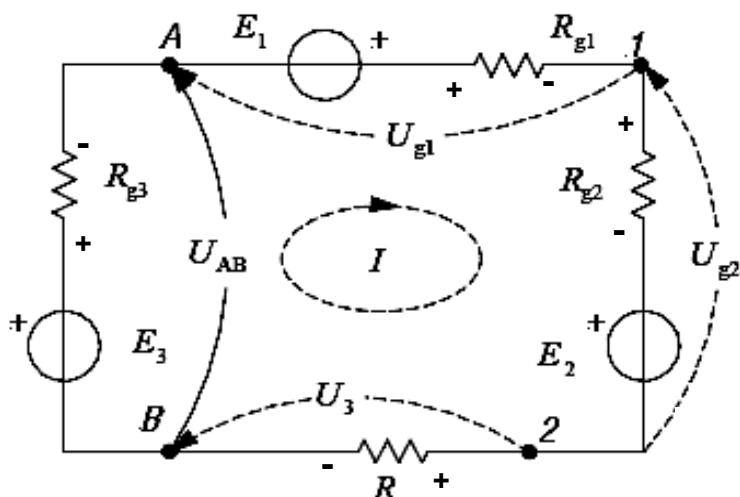
U svakoj tački prostog električnog kola stiču se samo po dva provodnika, dok kod složenih kola, postoje i tačke u kojima se stiču po tri i više provodnika. Tačke u električnim kolima u kojima se stiču najmanje tri provodnika zovu se čvorovi. Deo mreže između dva čvora, koji ne sadrži druge čvorove, zove se grana mreže. Broj čvorova mreže označava se sa n_ϵ , a grana sa n_g .

Drugi Kirhofov zakon za termogena električna kola i mreže sa vremenski konstantnim strujama: Algebarska suma elektromotornih i elektrootponih sila u bilo kojem termogenom kolu, ili po bilo kojoj konturi termogene električne mreže sa vremenski konstantnim strujama, uvek je ravna nuli:

$$\sum_i \pm E_i + \sum_j \pm R_j \cdot I_j = 0, \text{ gde su } \sum_i \pm E_i \text{ i } \sum_j \pm R_j \cdot I_j \text{ algebarske sume elektromotornih, odnosno}$$

elektrootponih sila. Pri tome ems ili pad napona uzimamo sa pozitivnim predznakom ako je pri ophodu konture obilazimo u smeru porasta napona (od „-“ ka „+“).

Drugi Kirhofov, kao i Omov zakon, direktna je posledica zakona o održanju energije primenjenog na termogena električna kola i mreže sa vremenski konstantnim strujama.



Primenimo II Kirhofov zakon na kolo–konturu sa slike. Padovi napona na otpornicima, $R \cdot I$, obeleženi simbolima „+“ i „-“, usaglašeni su sa smerom struje kroz otpornike. Prisetimo se da struje „teče“ od tačke većeg (oznaka „+“) ka tački manjeg potencijala (oznaka „-“), jer je smer struje smer kretanja pozitivnog naelektrisanja. Usvajimo da se smer obilaska (ophoda) konture poklapa sa

usvojenim referentnim smerom struje I .

Polazeći iz tačke A i krećući se u smeru struje I formiramo algebarske sume elektromotornih sila i padova napona :

$+E_1 - R_{g1} \cdot I$, jer ems E_1 „prolazimo“ u smeru porasta, a otpornik R_{g1} u smeru pada napona;

$-R_{g2} \cdot I - E_2$, jer i otpornik R_{g2} i ems E_2 obilazimo u smeru pada napona;

$-R \cdot I$, jer otpornik R obilazimo u smeru pada napona (od „+“ ka „-“);

$+E_3 - R_{g3} \cdot I$, jer ems E_3 „prolazimo“ u smeru porasta, a otpornik R_{g3} u smeru pada napona.

Konačno dobijamo:

$$+E_1 - R_{g1} \cdot I - R_{g2} \cdot I - E_2 - RI + E_3 - R_{g3} \cdot I = 0, \text{ odnosno } I = \frac{E_1 - E_2 + E_3}{R_{g1} + R_{g2} + R + R_{g3}}.$$

Označeni naponi jednaki su:

$$U_{g1} = -E_1 + R_{g1} \cdot I, \quad U_{g2} = E_2 + R_{g2} \cdot I, \quad U_3 = -R \cdot I \quad \text{i} \quad U_{AB} = +E_3 - R_{g3} \cdot I.$$