

1 Неодређени интеграли

1.1 Примитивна функција и основна правила интеграције

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на неком интервалу I . Функцију $F(x)$ зовемо *примитивном функцијом* функције $f(x)$, ако важи

$$F'(x) = f(x) \quad \text{за све } x \in I.$$

Постоји бесконачно много примитивних функција функције $f(x)$ и све се разликују до на константу: $(F(x) + C)' = f(x)$.

Скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ се зове *неодређени интеграл* функције $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

У горњој дефиницији функција $f(x)$ се зове *интегранд*, а C је произвољна константа.

Интеграција је процес супротан диференцирању, па таблица основних интеграла следи из таблице извода. У наставку су дати неки основни интеграли, при чему ће они који не следе директно из таблице извода бити изведени касније.

| | |
|---|--|
| $* \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1)$ | $* \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ |
| $* \int e^x dx = e^x + C$ | $* \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$ |
| $* \int \sin x dx = -\cos x + C$ | $* \int \cos x dx = \sin x + C$ |
| $* \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ | $* \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ |
| $* \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ | $* \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| $* \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$ | $* \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$ |
| $* \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C$ | $* \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$ |

За неодређени интеграл важе следеће особине:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a = \text{const}); \quad \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Важно је поменути и интеграле који нису елементарни, тј. који се не могу представити преко елементарних функција. Примери таквих интеграла су:

$$\int \sqrt{1-x^4} dx, \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{e^{-x}}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \dots$$

Пример 1.1. Израчунати интеграле:

а) $\int (2+3x^2 - \cos x) dx = 2 \int dx + 3 \int x^2 dx - \int \cos x dx = 2x + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - \sin x + C = 2x + x^3 - \sin x + C;$

б) $\int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x^2+2x+1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{3/2} dx + 2 \int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx = \frac{2}{5} x^{5/2} + \frac{4}{3} x^{3/2} + 2x^{1/2} + C;$

в) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arctg} x + C$

г) $\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{1-x^2+x^2}{x^2(1-x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \frac{dx}{1-x^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C;$

д) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1+\cos x}{2} dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C;$

ђ) $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x - x + C;$

е) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x} dx = \int \left(\frac{1}{5}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\ln \frac{1}{5}} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln \frac{1}{2}} + C.$

1.2 Интеграција методом смене

Смена у интегралу одговара изводу сложене функције.

Нека је $F(x)$ примитивна функција функције $f(x)$,

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Ако је $x = x(t)$ диференцијабилна функција, по правилу за извод сложене функције је

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) = F'(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t).$$

Интеграцијом претходне једнакости добијамо

$$F(x(t)) + C = \int f(x(t))x'(t) dt, \quad \text{тј.} \quad \int f(x) dx = \int f(x(t))x'(t) dt.$$

Пример 1.2. Израчунати интеграле:

- а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}} = \left[\frac{1+3x=t}{3dx=dt} \right] = \frac{1}{3} \int t^{-1/3} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{2/3}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{1}{2} \sqrt[3]{(1+3x)^2} + C;$
- б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} = \left[\frac{x^3+1=t}{3x^2dx=dt} \right] = \frac{1}{3} \int t^{-1/2} dt = \frac{1}{3} \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C;$
- в) $\int \frac{x dx}{x^4+2x^2+1} = \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \left[\frac{x^2+1=t}{2x dx=dt} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C;$
- г) $\int x e^{-x^2} dx = \left[\frac{-x^2=t}{-2x dx=dt} \right] = -\frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t + C = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C;$
- д) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \left[\frac{e^x=t}{e^x dx=dt} \right] = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctg t + C = \arctg e^x + C;$
- ђ) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \left[\frac{\ln x=t}{dx/x=dt} \right] = \int \sqrt{t} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} (\ln x)^{3/2} + C;$
- е) $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \left[\frac{\ln x=t}{dx/x=dt} \right] = \int \frac{dt}{t \ln t} = \left[\frac{\ln t=u}{dt/t=du} \right] = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln |\ln \ln x| + C.$

Пример 1.3. Израчунати интеграле:

- а) $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[\frac{\cos x=t}{-\sin x dx=dt} \right] = -\int \frac{dt}{t} = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C;$
- б) $\int \frac{\sin x}{1-\cos x} dx = \left[\frac{1-\cos x=t}{\sin x dx=dt} \right] = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln |1-\cos x| + C$
- в) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} = \left[\frac{\sqrt{x}=t, x=t^2}{dx=2t dt} \right] = \int \frac{2t dt}{2+t} = 2 \int \frac{t+2-2}{2+t} dt = 2 \int dt - 4 \int \frac{dt}{2+t}$
 $= 2t - 4 \ln |2+t| + C = 2\sqrt{x} - 4 \ln(2+\sqrt{x}) + C;$
- г) $\int x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{x+1=t^2}{dx=2t dt} \right] = \int (t^2-1)t \cdot 2t dt = 2 \int (t^4-t^2) dt = \frac{2}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + C$
 $= \frac{2}{5} \sqrt{(x-1)^5} - \frac{2}{3} \sqrt{(x-1)^3} + C;$
- д) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x}-1} = \left[\frac{x=t^6, \sqrt{x}=t^3, \sqrt[3]{x}=t^2}{dx=6t^5 dt} \right] = \int \frac{t^3}{t^2-1} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \left(t^6+t^4+t^2+1 - \frac{1}{t^2-1} \right) dt$
 $= 6 \left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} + \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt{x}}{3} + \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1} \right| \right) + C;$
- ђ) $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^5}} = \left[\frac{x=t^3}{dx=3t^2 dt} \right] = \int \frac{3t^2 dt}{t^3+t+t^5} = 3 \int \frac{t dt}{1+t^2+t^4} = \left[\frac{t^2=u}{2t dt=du} \right]$
 $= \frac{3}{2} \int \frac{du}{1+u+u^2} = \frac{3}{2} \int \frac{du}{(u+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 2 \int \frac{du}{((2u+1)/\sqrt{3})^2 + 1} = \left[\frac{(2u+1)/\sqrt{3}=p}{2 dt/\sqrt{3}=dp} \right]$
 $= \sqrt{3} \int \frac{dp}{p^2+1} = \sqrt{3} \arctg p + C = \sqrt{3} \arctg \frac{2\sqrt[3]{x^2}+1}{\sqrt{3}} + C.$

Пример 1.4. Израчунати а) $I_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$, б) $I_2 = \int \frac{dx}{x^2 - x + 1}$, в) $I_3 = \int \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1} dx$.

а) Интегранд запишимо у облику $\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{A}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$.

Множењем леве и десне стране са $(x-1)(x-2)$ добијамо систем

$$1 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - 2A - B.$$

Изједначавањем коефицијената уз x и уз 1 на левој и десној страни добијамо

$$A + B = 0, \quad -2A - B = 1, \quad \text{па је } A = -B = -1 \text{ и}$$

$$I_1 = - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} = -\ln|x-1| + \ln|x-2| + C = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$$

б) Полином у имениоцу нема реалних нула, па се трансформише у облик потпуног квадрата:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x-1/2)^2 + 3/4} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\frac{(x-1/2)^2}{3/4} + 1} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{((2x-1)/\sqrt{3})^2 + 1} \\ &= \left[\frac{(2x-1)/\sqrt{3} = t,}{2 dx/\sqrt{3} = dt} \right] = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } I_3 &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-2/3}{x^2-x+1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1/3}{x^2-x+1} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{2} I_2 = \frac{3}{2} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.5. Израчунати $I = \int \frac{x-1}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$.

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \int \frac{-2x+2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx = -\frac{1}{2} \left(\int \frac{-2x-4}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx + 6 \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} \right) = \left[\frac{5-4x-x^2 = t,}{(-4-2x) dx = dt} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} - 3 \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-((x-2)/3)^2}} = \left[\frac{(x-2)/3 = u,}{dx/3 = du} \right] \\ &= -\sqrt{5-4x-x^2} - 3 \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sqrt{5-4x-x^2} - 3 \arcsin u + C \\ &= -\sqrt{5-4x-x^2} - 3 \arcsin \frac{x-2}{3} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.6. Израчунати $I = \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x}} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-2/3}{\sqrt{x^2+x}} dx = \frac{3}{2} \left(\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x}} dx - \frac{5}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x}} \right) = \left[\frac{x^2+x = t,}{(2x+1) dx = dt} \right] \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{5}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1/2)^2 - 1/4}} = \left[\frac{x+1/2 = u,}{dx = du} \right] = \frac{3}{2} \frac{t^{1/2}}{1/2} - \frac{5}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1/4}} \\ &= 3\sqrt{x^2+x} - \frac{5}{2} \ln|u + \sqrt{u^2 - 1/4}| + C = 3\sqrt{x^2+x} - \frac{5}{2} \ln|x+1/2 + \sqrt{x^2+x}| + C \end{aligned}$$

1.3 Парцијална интеграција

Парцијална интеграција директно следи из правила за извод производа.

Нека су $u(x)$ и $v(x)$ диференцијабилне функције. На основу оравила за извод производа је

$$d(uv) = u dv + v du, \quad \text{тј.} \quad u dv = d(uv) - v du,$$

одкале интеграцијом у односу на x добијамо

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

што је формула за парцијалну интеграцију. Приликом примене ове формуле, важно је одабрати функције u и v на прави начин.

Примера ради, за интеграл $\int P_n(x)f(ax) dx$, где је $f(ax) \in \{e^{ax}, \sin(ax), \cos(ax)\}$ и $P_n(x)$ полином степена n , бира се $P_n(x) = u, f(ax) dx = dv$.

Пример 1.7. Израчунати интеграле:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int x e^{-x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = e^{-x} dx, \\ du = dx, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = uv - \int v du = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(x+1) + C; \\
 \text{б) } \int x^3 \cos 2x dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^3, \quad dv = \cos 2x dx, \\ du = 3x^2 dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x - \frac{3}{2} \int x^2 \sin 2x dx \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = x^2, \quad dv = \sin 2x dx, \\ du = 2x dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x - \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx \right) \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos 2x dx, \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \right) \\
 &= \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x + \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \cos 2x \right) + C \\
 &= \frac{1}{2} x^3 \sin 2x + \frac{3}{4} x^2 \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + C = \frac{2x^3 - 3x}{4} \sin 2x + \frac{6x^2 - 3}{8} \cos 2x + C; \\
 \text{в) } \int x \sin^2 x dx &= \int x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \cos 2x dx, \\ du = dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] \\
 &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx \right) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.
 \end{aligned}$$

Пример 1.8. Израчунати интеграле:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } \int \ln x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = dx, \\ du = dx/x, \quad v = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C; \\
 \text{б) } \int \ln(x^2 + 1) x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(x^2 + 1), \quad dv = dx, \\ du = 2x dx/(x^2 + 1), \quad v = x \end{array} \right] = x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx \\
 &= x \ln(x^2 + 1) - 2 \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = x \ln(x^2 + 1) - 2 \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\
 &= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C; \\
 \text{в) } \int \arcsin x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad dv = dx, \\ du = dx/\sqrt{1-x^2}, \quad v = x \end{array} \right] = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} 1-x^2 = t, \\ -2x dx = dt \end{array} \right] = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
 &= x \arcsin x + \frac{1}{2} t^{1/2} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C; \\
 \text{г) } \int x^2 \arcsin 2x dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arcsin 2x, \quad dv = x^2 dx, \\ du = 2 dx/\sqrt{1-4x^2}, \quad v = x^3/3 \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \arcsin 2x - \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= [x^3 = -x(-4x^2)/4 = -x(1-4x^2-1)/4 = -x(1-4x^2)/4 + x/4] \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin 2x - \frac{2}{3} \int \frac{-x(1-4x^2)/4 + x/4}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin 2x + \frac{1}{6} \int x \sqrt{1-4x^2} dx - \frac{1}{6} \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} 1-4x^2 = t, \\ -8x dx = dt \end{array} \right] \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin 2x - \frac{1}{48} \int \sqrt{t} dt + \frac{1}{48} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{x^3}{3} \arcsin 2x - \frac{1}{48} \frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{1}{48} \frac{t^{1/2}}{1/2} + C \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin 2x - \frac{1}{72} \sqrt{(1-4x^2)^3} + \frac{1}{24} \sqrt{1-4x^2} + C \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin 2x + \frac{1}{72} \sqrt{1-4x^2} (-1+4x^2+3) + C \\
 &= \frac{x^3}{3} \arcsin 2x + \frac{1}{36} \sqrt{1-4x^2} (1+2x^2) + C,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{д) } \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} dx &= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}, \quad dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1}, \quad v = x^2/2 \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{2x^2 + 2x + 1} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{2x^2 + 2x + 1 - 2x - 1}{2x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln(2x^2 + 2x + 1) + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.9. Израчунати:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int e^{ax} \sin bx dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad dv = \sin bx dx, \\ du = ae^{ax} dx, \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right] = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \\
&= \left[\begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad dv = \cos bx dx, \\ du = ae^{ax} dx, \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right] = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \left(\frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I \right), \\
\Rightarrow \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \right) I_1 &= \frac{e^{ax}}{b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C, \quad \text{тј.} \quad I_1 = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + C; \\
I_2 &= \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad dv = dx, \\ du = -x dx / \sqrt{a^2 - x^2}, \quad v = x \end{array} \right] = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\
&= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
\Rightarrow 2I_2 &= x \sqrt{a^2 - x^2} - a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad \text{тј.} \quad I_2 = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C; \\
I_3 &= \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \sqrt{x^2 + a^2}, \quad dv = dx, \\ du = x dx / \sqrt{x^2 + a^2}, \quad v = x \end{array} \right] = x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\
&= x \sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\
\Rightarrow 2I_3 &= x \sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad \text{тј.} \quad I_3 = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.
\end{aligned}$$

Пример 1.10. Израчунати

$$\begin{aligned}
I &= \int (2x - 1) \ln x \ln(x - 1) dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \ln(x - 1), \quad dv = (2x - 1) dx, \\ du = \left(\frac{\ln(x - 1)}{x} + \frac{\ln x}{x - 1} \right) dx, \quad v = x^2 - x \end{array} \right] \\
&= (x^2 - x) \ln x \ln(x - 1) - \int \frac{(x^2 - x) \ln(x - 1)}{x} dx - \int \frac{(x^2 - x) \ln x}{x - 1} dx \\
&= (x^2 - x) \ln x \ln(x - 1) - \int (x - 1) \ln(x - 1) dx - \int x \ln x dx
\end{aligned}$$

Даље је $\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = x dx, \\ du = dx/x, \quad v = x^2/2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C$. Дакле,

$$I = (x^2 - x) \ln x \ln(x - 1) - \frac{1}{2} (x - 1)^2 \ln(x - 1) + \frac{1}{4} (x - 1)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C.$$

1.4 Интеграција рационалних функција

Рационална функција је функција облика $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, где су P и Q полиноми и $Q(x) \neq 0$.

Посматрајмо интеграл рационалне функције $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$.

- Ако степен полином P није мањи од степена полинома Q , треба поделити полиноме:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = F(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

- Даље користимо особину да се сваки полином (са реалним коефицијентима) може факторисати на производ линеарних и нерастављивих квадратних фактора:

$$Q(x) = (x - \alpha_1)^{n_1} \cdots (x - \alpha_i)^{n_i} \cdot (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{m_j} \quad (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in \mathbb{R}, n_k, m_k \in \mathbb{N}).$$

Тада се свака рационална функција $\frac{R(x)}{Q(x)}$, где је степен полинома $R(x)$ мањи од степена полинома $Q(x)$ може на јединствен начин представити у облику збира елементарних рационалних функција, тј. функција облика

$$\frac{A_1}{x - \alpha_1}, \quad \frac{A_2}{(x - \alpha_1)^2}, \dots, \quad \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + \beta_1 x + \gamma_1}, \quad \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^2}, \dots$$

где су и имениоци фактори из $(x - \alpha_k)^{n_k}$ и $(x^2 + \beta_l x + \gamma_l)^{m_l}$ за $k = 1, \dots, i$ и $l = 1, \dots, j$.

Пример 1.11. Израчунати $I = \int \frac{3x}{(x-1)^2(2x+1)} dx$.

Раставимо подинтегралну функцију на збир елементарних рационалних функција:

$$\begin{aligned} \frac{3x}{(x-1)^2(2x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{2x+1} \quad / \cdot (x-1)^2(2x+1), \\ 3x &= A(x-1)(2x+1) + B(2x+1) + C(x-1)^2 \\ &= A(2x^2 - x - 1) + B(2x+1) + C(x^2 - 2x + 1) \\ &= (2A + C)x^2 + (-A + 2B - 2C)x - A + B + C. \end{aligned}$$

Изједначавањем коефицијената уз x^2 , x и 1 на левој и десној страни добијамо систем $2A + C = 0$, $-A + 2B - 2C = 3$, $-A + B + C = 0$, чије је решење $(A, B, C) = (\frac{1}{3}, 1, -\frac{2}{3})$. Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{2}{3} \int \frac{dx}{2x+1} = \left[\frac{1+2x=t}{2 dx=dt} \right] = \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} \\ &= \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{3} \ln|2x+1| + C = \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{2x+1} \right| - \frac{1}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.12. Израчунати $I = \int \frac{x^5 + 3x + 1}{x^4 - x^3 + x^2} dx$.

Дељењем одговарајућих полинома добијамо

$$\frac{x^5 + 3x + 1}{x^4 - x^3 + x^2} = x + 1 + \frac{-x^2 + 3x + 1}{x^4 - x^3 + x^2}.$$

Даље је

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + 3x + 1}{x^4 - x^3 + x^2} &= \frac{-x^2 + 3x + 1}{x^2(x^2 - x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1} \quad / \cdot x^2(x^2 - x + 1), \\ -x^2 + 3x + 1 &= Ax(x^2 - x + 1) + B(x^2 - x + 1) + (Cx + D)x^2 \\ &= A(x^3 - x^2 + x) + B(x^2 - x + 1) + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (A + C)x^3 + (-A + B + D)x^2 + (A - B)x + B, \end{aligned}$$

одкале добијамо систем $A + C = 0$, $-A + B + D = -1$, $A - B = 3$, $B = 1$, чије је решење $(A, B, C, D) = (4, 1, -4, 2)$. Следи да је полазни интеграл

$$\begin{aligned} I &= \int (x+1) dx + 4 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{-4x^2 + 2}{x^2 - x + 1} dx = \left[\frac{x^2 - x + 1 = t}{2x - 1 dx = dt} \right] \\ &= \frac{x^2}{2} + x + 4 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \int \frac{dt}{t} = \frac{x^2}{2} + x + 4 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln(x^2 - x + 1) + C. \end{aligned}$$

Пример 1.13. Израчунати $I = \int \frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)^2} dx$.

Овде је

$$\begin{aligned}\frac{x-2}{(x+1)(x^2+2)^2} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} + \frac{Dx+E}{(x^2+2)^2} \quad / \cdot (x+1)(x^2+2)^2, \\ x-2 &= A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+2) + (Dx+E)(x+1) \\ &= A(x^4+4x^2+4) + (Bx+C)(x^3+x^2+2x+2) + Dx^2+Dx+Ex+1 \\ &= (A+B)x^4 + (B+C)x^3 + (4A+2B+C+D)x^2 + (2B+2C+D+E)x + 4A+2C+E,\end{aligned}$$

одакле добијамо систем $A+B=0$, $B+C=0$, $4A+2B+C+D=0$, $2B+2C+D+E=1$, $4A+2C+E=-2$, чије је решење $(A, B, C, D, E) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Дакле,

$$\begin{aligned}I &= -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{x-1}{x^2+2} dx + \int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx \\ &= -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \int \frac{2x dx}{x^2+2} - \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+2} + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2+2)^2} dx = \left[\frac{x^2+2=t}{2x dx = dt} \right] \\ &= -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \int \frac{dt}{t} - \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} \\ &= -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln(x^2+2) - \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2+2)} + C.\end{aligned}$$

Пример 1.14. Израчунати $I = \int \frac{dx}{4x^4+1}$.

Да бисмо факторисали именилац, допуњујемо га до потпуног квадрата:

$$4x^4+1 = (2x^2+1)^2 - 4x^2 = (2x^2-2x+1)(2x^2+2x+1).$$

Сада је

$$\frac{1}{4x^4+1} = \frac{Ax+B}{2x^2+2x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2-2x+1}.$$

Решавањем одговарајућег система налазимо да је $A=B=D=\frac{1}{2}$ и $C=-\frac{1}{2}$, одакле је

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2} \int \frac{x+1}{2x^2+2x+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x-1}{2x^2-2x+1} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1} dx - \frac{1}{8} \int \frac{4x-2-2}{2x^2-2x+1} dx \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{d(2x^2+2x+1)}{2x^2+2x+1} dx + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2+x+1/2} - \frac{1}{8} \int \frac{d(2x^2-2x+1)}{2x^2-2x+1} dx + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2-x+1/2} \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2+1/4} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{(x-1/2)^2+1/4} \\ &= \frac{1}{8} \ln \frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(2x+1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg}(2x-1) + C.\end{aligned}$$

Пример 1.15. Израчунати $I = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Пођимо од интеграла $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2}$ и на њега применимо парцијалну интеграцију:

$$I_1 = \left[\begin{array}{l} u = 1/(x^2+a^2), \\ du = -2x/(x^2+a^2)^2 dx, \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = dx, \\ v = x \end{array} \right] = \frac{x}{x^2+a^2} + 2 \int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{x}{x^2+a^2} + 2I_1 - 2a^2 I,$$

па је

$$I = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2+a^2} + I_1 \right) = \frac{1}{2a^3} \left(\frac{ax}{x^2+a^2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right) + C.$$

1.5 Експоненцијални и тригонометријски интеграл

Нека је $R(x)$ рационална функција.

- Интеграл $\int R(e^x) dx$ се сменом $e^x = t$ своди на интеграл рационалне функције.

Пример 1.16. Израчунати $I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x/2}}$.

Даље је

$$I = \int \frac{dx}{e^x + e^{-x/2}} \cdot \frac{e^{x/2}}{e^{x/2}} = \int \frac{e^{x/2}}{e^{3x/2} + 1} dx = \left[e^{x/2} dx = 2 dt \right] = 2 \int \frac{dt}{t^3 + 1}.$$

$$\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t + 1} + \frac{Bt + C}{t^2 - t + 1}, \quad \text{одакле се добија} \quad (A, B, C) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t + 1} + \frac{2}{3} \int \frac{-t + 2}{t^2 - t + 1} dt = \frac{2}{3} \ln(t + 1) - \frac{1}{3} \int \frac{2t - 1 - 3}{t^2 - t + 1} dt \\ &= \frac{2}{3} \ln(t + 1) - \frac{1}{3} \ln(t^2 - t + 1) + \int \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + 3/4} \\ &= \frac{2}{3} \ln(t + 1) - \frac{1}{3} \ln(t^2 - t + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C \\ &= \frac{2}{3} \ln(e^{x/2} + 1) - \frac{1}{3} \ln(e^x - e^{x/2} + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{x/2} - 1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

- Интеграл $\int R(\sin x, \cos x) dx$ се сменом $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ (*универзалном тригонометријском сменом*) своди на интеграл рационалне функције. Тада је

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}.$$

Пример 1.17. Израчунати $I = \int \frac{dx}{3 - 2 \sin x}$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}, \right. \\ &\quad \left. \sin x = \frac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \right] = \int \frac{2 dt / (1 + t^2)}{3 - 2 \cdot 2t / (1 + t^2)} = 2 \int \frac{dt}{3 + 3t^2 - 4t} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t^2 - 4t/3 + 1} \\ &= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(t - 2/3)^2 + 5/9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t - 2}{\sqrt{5}} + C = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{\sqrt{5}} + C. \end{aligned}$$

- Интеграл типа $\int R(\sin x) \cos x dx$ и $\int R(\cos x) \sin x dx$ се редом сменама $\sin x = t$ и $\cos x = t$ свode на интеграле рационалне функције.

Пример 1.18. Израчунати $I = \int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

$$I = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int (t^2 - t^4) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

Пример 1.19. Израчунати $I = \int \frac{dx}{\sin x}$.

$$I = \int \frac{dx}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} = \left[-\sin x dx = dt \right] = \int \frac{dt}{t^2 - 1}.$$

Даље је

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t - 1} + \frac{B}{t + 1}, \quad \text{тј.} \quad 1 = A(t + 1) + B(t - 1).$$

За $t = 1$ добијамо $A = \frac{1}{2}$, а за $t = -1$ је $B = -\frac{1}{2}$. Дакле,

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t - 1}{t + 1} \right| + C = \ln \sqrt{\frac{\cos t - 1}{\cos t + 1}} + C = \ln \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 1.20. Израчунати $I = \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$.

$$I = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = \sin x / \cos^2 x, \\ du = dx, \quad v = 1 / \cos x \end{array} \right] = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos x} \cdot \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{x}{\cos x} - \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \frac{x}{\cos x} - \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C.$$

• Интегралы типа $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ и $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ се решавају применом одговарајућих адиционных формула:

$$\begin{aligned} \sin \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x), \\ \sin \alpha x \sin \beta x &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x), \\ \cos \alpha x \cos \beta x &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x). \end{aligned}$$

Пример 1.21. Израчунати $I = \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx$.

$$I = \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{5x}{6} + \cos \frac{x}{6} \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \sin \frac{5x}{6} + \frac{1}{2} \cdot 6 \sin \frac{x}{6} + C = \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C.$$

1.6 Ирационални интегралы

Тригонометријске и хиперболичке смене

- Интегралы типа $R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ се решавају сменом $x = a \sin t$.
- Интегралы типа $R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ се решавају сменом $x = a \operatorname{sh} t$ или $x = a \operatorname{tg} t$.
- Интегралы типа $R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ се решавају сменом $x = a \operatorname{ch} t$.

Лако се проверава да за хиперболичке функције $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ важи

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \quad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}, \end{aligned}$$

а за њихове инверзне $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ и $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Пример 1.22. Израчунати $I = \int \sqrt{1 - 4x^2} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} 2x = \sin t, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2, \\ 2 dx = \cos t dt \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt = \frac{1}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= \frac{t}{4} + \frac{1}{8} \sin 2t + C = \frac{t}{4} + \frac{1}{4} \sin t \cos t + C = \frac{1}{4} \arcsin 2x + \frac{1}{4} \sin \arcsin 2x \sqrt{1 - \sin^2 \arcsin 2x} + C \\ &= \frac{1}{4} \arcsin 2x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - 4x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 1.23. Израчунати $I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \quad (a > 0)$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} x = a \operatorname{sh} t, \\ dx = a \operatorname{ch} t dt \end{array} \right] = a \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{a^2(1 + \operatorname{sh}^2 t)}} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t} dt = t + C = \operatorname{arsh} x/a + C \\ &= \ln \left(x/a + \sqrt{(x/a)^2 + 1} \right) + C = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C_1 \quad (C_1 = C - \ln a). \end{aligned}$$

Пример 1.24. Израчунати $I = \int \sqrt{x^2 + x - 1} dx$.

Допуном до потпуног квадрата добијамо

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}} dx = \left[\begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{ch} t, \\ dx = \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{sh} t dt \end{array} \right] = \frac{\sqrt{5}}{2} \int \sqrt{\frac{5}{4} \operatorname{ch}^2 t - \frac{5}{4}} \operatorname{sh} t dt = \frac{5}{4} \int \operatorname{sh}^2 t dt \\ &= \frac{5}{4} \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = \frac{5}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t \right) = \frac{5}{8} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t - t) = \frac{5}{8} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}} \sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1} - \operatorname{arch} \frac{2x+1}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= \frac{1}{4} (2x+1) \sqrt{x^2 + x - 1} - \frac{5}{8} \ln(2x+1 + 2\sqrt{x^2 + x - 1}) + C_1. \end{aligned}$$

Пример 1.25. Израчунати $I = \int x^2 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{sh} t, \sqrt{1+x^2} = \operatorname{ch} t \\ dx = \operatorname{ch} t dt \end{array} \right] = \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt = \frac{1}{4} \int \operatorname{sh}^2 2t dt = \frac{1}{8} \int (\operatorname{ch} 4t - 1) dt \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 4t}{4} - t \right) + C = \frac{1}{8} \left(\frac{\operatorname{sh} 2t \operatorname{ch} 2t}{2} - t \right) + C = \frac{1}{8} (\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t (1 + 2 \operatorname{sh}^2 t) - t) + C \\ &= \frac{1}{8} (x \sqrt{1+x^2} (1 + 2x^2) - \operatorname{arsh} x) + C = \frac{1}{8} (x \sqrt{1+x^2} (1 + 2x^2) - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})) + C. \end{aligned}$$

Метод Остроградског

Овом методом решавамо интеграле облика $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ тако што их напишемо на следећи начин:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

где је $P_n(x)$ је полином степена n , $Q_{n-1}(x)$ полином степена $n-1$ са неодређеним коефицијентима и λ константа. Коефицијенти полинома $Q_{n-1}(x)$ и λ се налазе диференцирањем претходне једнакости.

Пример 1.26. Израчунати $I = \int \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx$.

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = (Ax + B) \sqrt{x^2 + x + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}},$$

одакле диференцирањем добијамо

$$\frac{x^2 + x + 2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = A \sqrt{x^2 + x + 1} + (Ax + B) \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2 + x + 1}}.$$

Множењем претходне једнакости са $2\sqrt{x^2 + x + 1}$ добијамо

$$2(x^2 + x + 2) = 2A(x^2 + x + 1) + (Ax + B)(2x + 1) + 2\lambda, \quad \text{тј.} \quad 2x^2 + 2x + 4 = 4Ax^2 + (3A + 2B)x + (2A + B + 2\lambda),$$

одакле изједначавањем коефицијената добијамо систем $4A = 2$, $3A + 2B = 2$, $2A + B + 2\lambda = 4$, чије је решење $(A, B, C) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8})$. Дакле,

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{11}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{11}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{11}{8} \ln |2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1}| + C. \end{aligned}$$

Интеграли облика $\int \frac{dx}{(x - \alpha)^n \sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ($n \in \mathbb{N}$) се сменом $x - \alpha = 1/t$ свде на претходни облик.

Интеграл диференцијалног бинома

Интеграл облика $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где су $a, b \in \mathbb{R}$ и $m, n, p \in \mathbb{Q}$ се своди на интеграл рационалне функције ако је бар један од бројева $p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$ цео. У свим осталим случајевим интеграл диференцијалног бинома се не може изразити помоћу елементарних функција.

Ако је $p \in \mathbb{Z}$ и $p > 0$, бином $(a+bx^n)^p$ треба развити по биномном образцу. Размотримо наредне случајеве.

(1°) Када је $p \in \mathbb{Z}$ и $p < 0$ уводи се смена $x = t^k$, где је k најмањи заједнички садржалац за имениоце разломака m и n .

(2°) Када је $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ уводи се смена $a+bx^n = t^r$, где је r именилац разломка p .

(3°) Када је $p + \frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ уводи се смена $ax^{-n} + b = t^r$, где је r поново именилац разломка p .

Пример 1.27. Свести дате интеграле на интеграле рационалних функција:

$$\text{а) } \int x^{\frac{1}{2}} (1+2x^{\frac{1}{3}})^{-3} dx = \left[\begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right] = \int t^3 (1+2t^2)^{-3} \cdot 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8 dt}{(1+2t^2)^3}.$$

$$\text{б) } \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx = \left[\begin{array}{l} 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3, x = (t^3-1)^4 \\ dx = 12t^2(t^3-1)^3 dt \end{array} \right] = 12 \int (t^6 - t^3) dt.$$

$$\text{в) } \int x^{-11} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx = \left[\begin{array}{l} x^{-4} + 1 = t^2, t = (x^{-4} + 1)^{\frac{1}{2}}, \\ dt = -2x^{-5} (x^{-4} + 1)^{-\frac{1}{2}} dx \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int (t^2 - 1)^2 dt.$$

Ојлерове смене

Посматрамо интеграле облика $I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$.

(1°) Ако је $a > 0$, уводи су смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t \mp x\sqrt{a}.$$

Пример 1.28. Израчунати $I = \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2+1}}$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = t - x, \\ x = \frac{t^2-1}{2t}, dx = \frac{t^2+1}{2t^2} dt \end{array} \right] = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2+1}{2t^2} dt = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{4t^2} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{x^2+1}) - \frac{1}{4(x + \sqrt{x^2+1})^2} \cdot \frac{(x - \sqrt{x^2+1})^2}{(x - \sqrt{x^2+1})^2} + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln(x + \sqrt{x^2+1}) - x^2 + \sqrt{1+x^2} \right) + C_1. \end{aligned}$$

(2°) Ако је $c > 0$, уводи су смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \mp \sqrt{c}.$$

Пример 1.29. Израчунати $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$.

$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{l} \sqrt{1+x-x^2} = tx - 1, \\ x = \frac{1+2t}{t^2+1}, dx = -\frac{2(t^2+t-1)}{(t^2+1)^2} dt \end{array} \right] = -2 \int \frac{dt}{1+(t+1)^2} = -2 \operatorname{arctg}(t+1) + C \\ &= -2 \operatorname{arctg} \frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C. \end{aligned}$$

(3°) Ако су корени квадратног тринома ax^2+bx+c реални, уводи се смена

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t.$$

Пример 1.30. Израчунати $I = \int \frac{(x-1) dx}{(x^2+2x)\sqrt{x^2+2x}}$.

$$I = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2x} = xt, \\ x = \frac{2}{t^2-1}, \quad dx = -\frac{4t dt}{(t^2-1)^2} \end{array} \right] = -\frac{1}{2} \int \frac{3-t^2}{t^2} dt = \frac{3}{2t} - \frac{1}{2}t + C = \frac{1+2x}{\sqrt{x^2+2x}} + C.$$

Напомена: Случајеви $a > 0$ и $c > 0$ своде се један на други сменом $x = 1/t$.

1.7 Рекурентне формуле

Пример 1.31. Израчунати $I_n = \int \sin^n x dx \quad (n \geq 2)$.

$$\begin{aligned} I_n &= \left[\begin{array}{l} u = \sin^{n-1} x, \\ du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx, \end{array} \quad \begin{array}{l} dv = \sin x dx, \\ v = -\cos x \end{array} \right] = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n. \end{aligned}$$

Дакле,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x, \quad I_1 = -\cos x + C, \quad I_0 = x + C.$$

Пример 1.32. Израчунати $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \quad (n \geq 2)$.

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2+x^2-x^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^n} dx = \left[\begin{array}{l} u = x, \quad dv = x dx / (x^2+a^2)^n \\ du = dx, \quad v = -1/(2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}) \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{a^2} I_{n-1} - \frac{1}{a^2} \left(-\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} I_{n-1} \right). \end{aligned}$$

Дакле,

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{a^2} I_{n-1} + \frac{1}{2a^2(n-1)} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}, \quad I_1 = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C, \quad I_0 = x + C.$$

Рада Мутавауић Ђукић