3 Примене извода

3.1 Основне теореме диференцијалног рачуна

Дефиниција 3.1. Нека је реална функција f дефинисана у некој оклини тачки c.

- c је тачка *локалног максимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(c) \geqslant f(x)$ за све $x \in (c-\delta, c+\delta)$.
- c је тачка *локалног минимума* функције f ако постоји $\delta > 0$ такво да је $f(c) \leqslant f(x)$ за све $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

Тачке локалног максимума и минимума функције f су *локалне екстремне вредности* те функције.

Локалне екстремне вредности су и *глобалне (апсолутне) екстремне вредности* ако одговарајуће неједнакости важе на целом домену функције f уместо на интервалу $(c-\delta, c+\delta)$.

Дефиниција 3.2. Нека је f диференцијабилна функција. Тачка x за коју је $f'(x) = 0$ је *стационарна тачка* функције f.

Теорема 3.1. (Фермаова теорема) Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ функција и $c \in (a,b)$ тачка локалне екстремне вредности те функције. Ако је f диференцијабилна у тачки c, онда је $f'(c) = 0$.

Доказ. Нека је тачка c локални максимум функције (за локални минимум поступак је аналоган). Тада постоји $\delta > 0$ тако да је $f(c) \geqslant f(x)$ за $x \in (c-\delta, c+\delta)$. Следи да за $h \in (0,\delta)$ важи $f(c+h) \leqslant f(c)$, па је $\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0$. Дакле,

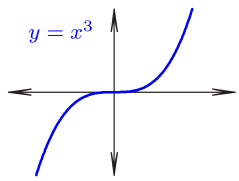
$$f'_+(c) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqslant 0.$$

На исти начин за $h \in (-\delta, 0)$ добијамо

$$f'_-(c) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0.$$

Дакле, мора бити $f'(c) = 0$. □

Следи да је услов $f'(c) = 0$ неопходан да функција диференцијабилна у тачки c има у тачки c локалну екстремну вредност. Ипак, тај услов није и довољан.

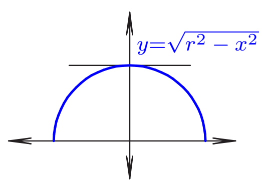


Пример 3.1. За функцију $y = x^3$ важи $y'(0) = 0$, а $x = 0$ није тачка локалне екстремне вредности функције y.

Теорема 3.2. (Ролова теорема) Нека је функција f непрекидна на интервалу $[a,b]$ и диференцијабилна на интервалу (a,b). Ако је $f(a) = f(b)$, тада постоји бар једна тачка $c \in (a,b)$ таква да је $f'(c) = 0$.

Доказ се изводи коришћењем тврђења да непрекидна функција на затвореном интервалу $[a,b]$ достиже минимум и максимум на $[a,b]$ и применом Фермаове теореме.

Пример 3.2. Посматрајмо функцију $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Дата функција је непрекидна на интервалу $[-r,r]$ и диференцијабилна на интервалу $(-r,r)$. Следи да се може применити Ролова теорема и заиста, постоји $c \in (-r,r)$ такво да је $f'(c) = 0$ (тангента је паралелна x-оси.)



Теорема 3.3. (Лагранжова теорема) Нека је функција f непрекидна на интервалу $[a,b]$ и диференцијабилна на интервалу (a,b). Тада постоји тачка $c \in (a,b)$ таква да је

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Доказ се изводи применом Ролове теореме на помоћну функцију $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$. Приметимо да је тангента на криву f у тачки c паралелна сечици која пролази кроз тачке $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

3.2 Интервали монотоности и екстремне вредности функције

Теорема 3.4. (Интервали монотоности) Нека је функција $f(x)$ диференцијабилна на интервалу (a, b). Да би функција $f(x)$ била растућа (опадајућа) на интервалу (a, b) неопходно је и довољно да важи $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) за свако $x \in (a, b)$.

Доказ. Доказ изводимо у случају растуће функције. Покажимо да је услов неопходан. Нека је $x_0 \in (a, b)$ произвољна тачка. Како је f растућа функција, важи

$$x \in (a, b), x > x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant f(x_0) \quad \text{и} \quad x \in (a, b), x < x_0 \Rightarrow f(x) \leqslant f(x_0).$$

Тада је $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geqslant 0$.

Услов је и довољан. Нека је $f'(x) \geqslant 0$ за свако $x \in (a, b)$. Ако су $x_1 < x_2$ две прозвољне тачке тог интервала, тада на основу Лагранжове теореме постоји тачка $c \in (x_1, x_2)$ за коју је $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$. Како је $f'(c) \geqslant 0$, то је $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, тј. f је растућа. □

Теорема 3.5. Нека је функција f диференцијабилна на интервалу (a, b) и $x_0 \in (a, b)$.

- Ако је $f'(x_0) > 0$ тада је f строго растућа у тачки x_0.
- Ако је $f'(x_0) < 0$ тада је f строго опадајућа у тачки x_0.

Теорема 3.6. Нека је функција f диференцијабилна у некој околини тачке x_0, осим можда у тачки x_0 у којој је непрекидна. Ако постоји $\delta > 0$ такво да

- за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ важи $f'(x) < 0$ и за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ важи $f'(x) > 0$, тада је x_0 тачка локалног минимума функције f;
- за $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ важи $f'(x) > 0$ и за $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ важи $f'(x) < 0$, тада је x_0 тачка локалног максимума функције f.

Пример 3.3. Наћи интервале монотоности и екстремне вредности функције $y = \frac{e^x + x}{e^x - x}$.

Функција је дефинисана на целом скупу $\mathbb{R}$, јер је $e^x > x$ за $x \in \mathbb{R}$. Први извод је $y' = \frac{2e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$. Како је $e^x > 0$ за $x \in \mathbb{R}$, знак првог извода зависи само од $1 - x$. Дакле, $y' > 0$ за $x < 1$ и ту функција расте; $y' < 0$ за $x > 1$ и ту функција опада; тачка $\left(1, \frac{e+1}{e-1}\right)$ је локални (и глобални) масксимум функције.

Теорема 3.7. Нека је x_0 стационарна тачка функције f и нека постоји $f''(x_0)$.

- Ако је $f''(x_0) > 0$ тада је x_0 тачка локалног минимума функције f.
- Ако је $f''(x_0) < 0$ тада је x_0 тачка локалног максимума функције f.

Пример 3.4. Наћи екстремне вредности функције $y = \sin x + \cos x$ за $x \in [0, 2\pi)$.

Налазимо $y' = \cos x - \sin x = 0$ за $x = \frac{\pi}{4}$ или $x = \frac{5\pi}{4}$. Даље је $y'' = -\sin x - \cos x$ и $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} < 0$, па је тачка $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ локални максимум функције, а $y''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt{2} > 0$, па је тачка $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$ локални минимум функције.

3.3 Лопиталово правило

Теорема 3.8. (Кошијева теорема о средњој вредности) Нека су функције f и g непрекидне на $[a,b]$, диференцијабилне на (a,b) и нека је $g'(x) \neq 0$ за све $x \in (a,b)$. Тада постоји $\xi \in (a,b)$ за које је

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Доказ се може извести применом Ролове теореме на помоћну функцију $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x)$.

Теорема 3.9. (Лопиталово правило) Нека су f и g функције, $a \in [-\infty, \infty]$ и важи

1. f и g су диференцијабилне за $x \neq a$;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$);
3. $g'(x) \neq 0$ за $x \neq a$;
4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$.

Тада је $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Доказ. Претпоставимо због једноставности да је $a \neq \pm\infty$ и да је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Ако је неопходно додефинишимо функције f и g у тачки a: $f(a) = g(a) = 0$. Тада за свако $x > a$ важи да су f и g непрекидне на $[a,x]$ и диференцијабилне на (a,x) и да је $g'(y) \neq 0$ за свако $y \in (a,x)$. На основу Кошијеве теореме о средњој вредности постоји $\xi = \xi(x) \in (a,x)$ такво да је

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Дакле,

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = L.$$

Исто важи за леви лимес и доказ је комплетан.

Ако је $a = \infty$, дефинишу се функције $F(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ и $G(x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$, па се примењује Лопиталово правило за $a = 0$. Слично се поступа и у преосталом случају. □

Пример 3.5. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

Нека је $y = x^x$. Тада је

$$\lim_{x\to 0+} \ln y = \lim_{x\to 0+} (x \ln x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x} = \left[-\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Дакле, $\lim\limits_{x\to 0+} y = e^0 = 1$.

Пример 3.6. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$.

Функција под лимесом је облика $\frac{\infty}{\infty}$. Примењујемо Лопиталово правило n пута:

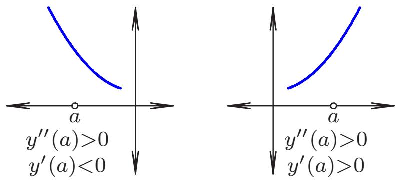
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^n)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(nx^{n-1})'}{(e^x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = n! \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.\end{aligned}$$

3.4 Конвексност

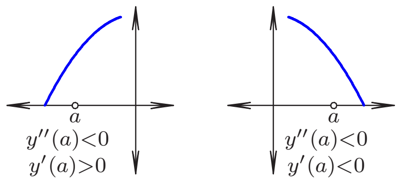
Дефиниција 3.3. Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ функција, $x_1, x_2 \in (a,b)$ и $\lambda \in [0,1]$. f је

- *конвексна* ако важи $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Значи да је график функције испод дужи која спаја тачке $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.
- *конкавна* ако важи $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Значи да је график функције изнад дужи која спаја тачке $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.

Претпоставимо да је $f''(a) > 0$. То значи да у околини тачке a (нагиб тангенте) f' расте - таква крива је конвексна.



Претпоставимо да је $f''(a) < 0$. То значи да у околини тачке a (нагиб тангенте) f' опада - таква крива је конкавна.



Теорема 3.10. Нека функција f има други извод на (a,b). Тада за $x \in (a,b)$ важи

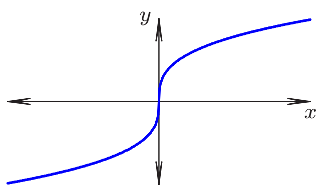
- $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ је конвексна;
- $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ је строго конвексна;
- $f''(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ је конкавна;
- $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ је строго конкавна.

Дефиниција 3.4. Нека је функција f непрекидна у тачки x_0 и има коначан или бесконачан извод $f'(x_0)$. Ако постоји $\delta > 0$ такво да је на једном од интервала $(x_0 - \delta)$, $(x_0 + \delta)$ функција f строго конвексна а на другом строго конкавна, тада тачку $(x_0, f(x_0))$ зовемо *превојном тачком* функције f.

Претпоставимо још да функција f има други извод f'' у некој околини тачке x_0 осим можда у самој тачки x_0. Ако f'' мења знак пролазећи кроз тачку x_0, тада је x_0 превојна тачка функције f.

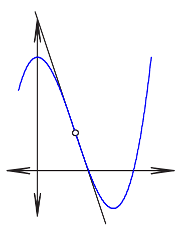
Пример 3.7. Посматрајмо функцију $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Већ смо видели да она има бесконачан први извод у нули, јер је $f'(x) = x^{-2/3}/3$. Даље је $f''(x) = -2x^{-5/3}/9$. За $x < 0$ је $f''(x) > 0$ и ту је функција строго конвескна, док је за $x > 0$ је $f''(x) < 0$ и ту је функција строго конкавна. Дакле, нула је превојна тачка функције f.



Теорема 3.11. Ако за функцију f постоји други извод у тачки x_0 и ако је x_0 превојна тачка функције f, тада је $f''(x_0) = 0$.

Пример 3.8. Нека је дата функција $y = x^3 - 3x^2 + 3$. Налазимо $y' = 3x^2 - 6x$ и $y'' = 6x - 6$, па је $y'' = 0$ за $x = 1$ и ту f'' мења знак. Дакле, тачка $(1,1)$ је превојна у тачка функције f (у тој тачки се крива и њена тангента секу).



3.5 Задаци

Пример 3.9. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Узастопном применом Лопиталовог правила рачунамо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-x^2)^{-1/2}-(1+x^2)^{-1}}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x)+(1+x^2)^{-2}2x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3.10. Израчунати $L = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}$.

$$L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{1/\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\ln\frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x\to 0} -\frac{\ln\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Применом Лопиталовог правила на последњи лимес добијамо

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x/\cos x}{2\operatorname{tg} x/\cos^2 x}} = \sqrt{e}.$$

Пример 3.11. Испитати ток и скицирати график функције $y=(2x-1)e^{-1/x}$.

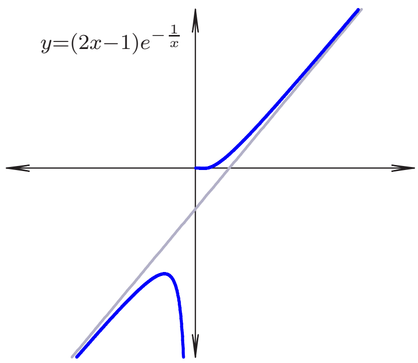
Домен је $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; нула функције је $N(1/2,0)$; $y<0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/2)$ и $y>0$ за $x\in(1/2,\infty)$. Права $x=0$ је вертикална асимптпта са леве стране, јер је

$$\lim_{x\to 0+} y(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0-} y(x) = -\infty.$$

Кад $x\to\pm\infty$ можемо користити Маколренов развој $e^t = 1+t+o(t)$ кад $t\to 0$:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(2x-1)e^{-1/x} = \lim_{x\to\pm\infty}(2x-1)\left(1-\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}(2x-3+o(1)),$$

па је права $y=2x-3$ коса асимптота кад $x\to\pm\infty$.



Даље је $y'(x) = e^{-1/x}\frac{2x^2+2x-1}{x^2}$.

- $y \nearrow$ за $x\in(-\infty,-(1+\sqrt{3})/2)\cup((\sqrt{3}-1)/2,\infty)$;
- $y \searrow$ за $x\in(-(1+\sqrt{3})/2,0)\cup(0,(\sqrt{3}-1)/2)$.

Тачка $(-(1+\sqrt{3})/2, y(-(1+\sqrt{3})/2))$ је локални максимум функције, а тачка $((\sqrt{3}-1)/2, y(\sqrt{3}-1)/2))$ је локални минимум функције. Други извод је $y'' = e^{-1/x}\frac{4x-1}{x^4}$, па је y конкавна за $x\in(-\infty,0)\cup(0,1/4)$ и конвексна за $x\in(1/4,\infty)$. Функција има превој у тачки $(1/4, y(1/4))$.

Пример 3.12. Испитати ток и скицирати график функције

$$y=\frac{\ln^2(x-2)}{x-2},\quad y=\frac{\sqrt{x+2}}{\ln^2(x+2)},\quad y=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}},\quad y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}},\quad y=x-1-\sqrt{x^2-x}.$$