

4 Тејлоров полином

4.1 Тејлоров и Маклоренов полином

Нека је f диференцијабилна функција у некој околини тачке a . Тада је *једначина тангенте*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

заправо *линеарна апроксимација* функције f у околини тачке a .

Ако означимо

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x - a),$$

тада је

$$f(a) = T_1(a), \quad f'(a) = T_1'(a) \text{ и } f(x) \approx T_1(x) \text{ за } x \text{ из околине тачке } a.$$

Полином $T_1(x)$ је *Тејлоров полином* првог степена за функцију f у околини тачке a .

Слично, можемо пожелити да два пута диференцијабилну функцију f у околини тачке a апроксимирамо квадратним полиномом $T_2(x)$ тако да важи

$$f(a) = T_2(a), \quad f'(a) = T_2'(a) \text{ и } f''(a) = T_2''(a).$$

Тада је

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2$$

Тејлоров полином другог степена за функцију f у околини тачке a .

Дефиниција 4.1. Нека је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу који садржи тачку a у унутрашњости и n пута диференцијабилна у тачки a .

Тејлоров полином реда n за функцију f у околини тачке a је полином

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Ако је $a = 0$, полином T_n називамо *Маклореновим полиномом*.

Пример 4.1. Наћи Маклоренов полином степена $n \in \mathbb{N}$ за функцију $f(x) = e^x$.

Тражени полином је облика

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Како је $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ и $f(0) = 1$, добијамо

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

У горњој формули смо користили да је $0! = 1$ и $f^{(0)} = f$.

Пример 4.2. Наћи Тејлоров полином степена 3 за функцију $f(x) = x^3$ у околини тачке $a = 2$.

Овде је $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$ (приметимо да су сви изводи реда већег од 3 једнаки нули, па је $f(x) \equiv T_3(x)$). Дакле, $f(2) = 8$, $f'(2) = 12$, $f''(2) = 6$ и заменом у формули

$$T_3(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x - 2) + \frac{f''(2)}{2!}(x - 2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x - 2)^3$$

добијамо

$$T_3(x) = 8 + 12(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3.$$

4.2 Маклоренови развоји неких основних функција

Маклоренови развоји су Маклоренови полиноми произвољног степена, тј. степени редови. За функцију f која има све изводе у тачки a тај развој је облика

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Пример 4.3. Наћи Маклоренов развој функције $f(x) = e^x$.

На основу примера 4.1 Маклореновог полинома степена n , видимо да је тражени (бесконачни) развој

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Пример 4.4. Наћи Маклоренов развој функције $f(x) = \sin x$.

Овде је $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, па је $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$. Примећујемо да је $f^{(4k)} = f$, $f^{(4k+1)} = f'$, $f^{(4k+2)} = f''$ и $f^{(4k+3)} = f'''$ за $k \in \mathbb{N}$. Дакле,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Слично се добијају и следећи Маклоренови развоји:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^a \approx 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n}x^n,$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Пример 4.5. Апроксимирати функцију $\ln(1+x-x^2)$ Маклореновим полиномом четвртог степена.

Користимо познати развој $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$ кад $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \ln(1+x-x^2) &= x - x^2 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} - \frac{(x-x^2)^4}{4} + o((x-x^2)^4) \\ &= x - x^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3 + x^4) + \frac{1}{3}(x^3 - 3x^4) - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

4.3 Процена грешке

При апроксимацији n пута непрекидно диференцијабилне функције f Тејлоровим полиномом степена n у околини тачке a :

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

јавља се грешка R_n , при чему важи $R_n = o(x^n)$.

Следеће опште тврђење је доказао Лагранж, а у доказу се користи Ролова теорема.

Теорема 4.1. Нека је функција f $n+1$ пута диференцијабилна у интервалу који садржи тачке a и b и нека је $T_n(x)$ њен Тејлоров полином степена n у околини тачке a . Тада за грешку $R_n(x)$ важи

$$R_n(b) = f(b) - T_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{n+1},$$

где је c нека (непозната) тачка између a и b .

Доказ. Очекујемо да $R_n(b)$ буде реда величине следећег члана у Тејлоровом развоју, тј. $O((b-a)^{n+1})$. Дакле, нека је $R_n(b) = k \cdot (b-a)^{n+1}$ за неки реалан број k .

Посматрајмо функцију

$$g(x) = f(x) - T_n(x) - k(x-a)^{n+1}.$$

Подсетимо се да за полином T_n важи $T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ за $k = 0, 1, \dots, n$, што значи да је

$$g(a) = g'(a) = g''(a) = \dots = g^{(n)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad g(b) = 0.$$

Сада користимо Ролову теорему.

Како је $g(a) = g(b) = 0$, постоји тачка $x_1 \in (a, b)$ таква да је $g'(x_1) = 0$.

Како је $g'(a) = g'(x_1) = 0$, постоји тачка $x_2 \in (a, x_1)$ таква да је $g''(x_2) = 0$.

...

Како је $g^{(n)}(a) = g^{(n)}(x_n) = 0$, постоји тачка $x_{n+1} \in (a, x_n)$ таква да је $g^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0$.

Означимо $c = x_{n+1}$. Јасно је да је $a < x_{n+1} < b$. Како је $T_n^{(n+1)}(x) = 0$ (извод реда $n+1$ полинома степена n је нула), имамо

$$g^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k \cdot (n+1)!,$$

одакле је $k = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$. Према томе, $R_n(b) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) (b-a)^{n+1}$. □

Пример 4.6. Проценити грешку апроксимације функције $f(x) = \cos x$ Маклореновим полиномом другог степена за $x = 0,6$.

Одговарајући Маклоренов полином је $T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$, а грешка је облика

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!} x^3, \quad \text{за неко } c \text{ између } 0 \text{ и } 0,6.$$

Сада проценимо апсолутну вредност грешке за $x = 0,6$:

$$|R_2(0,6)| = \frac{|\sin c|}{3!} 0,6^3 \leq \frac{0,6^3}{6} = 0,036.$$

4.4 Испитивање асимптотике функције

Важна примена Тејлоровог полинома је у одређивању асимптотике функције. Размотримо следеће примере.

Пример 4.7. Израчунати граничне вредности

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + 1/x)), \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x}, \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

а) Ако искористимо Маклоренов развој за функцију $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ кад $t \rightarrow 0$ (мало „о“ од $f(t)$ је функција за коју важи $o(f(t))/f(t) \rightarrow 0$ кад $t \rightarrow 0$ тј. $o(f(t))$ је занемарљиво мала у поређењу са $f(t)$) имамо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x - x + \frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Алтернативно, задатак се може решити применом Лопиталовог правила. Ако уведемо смену $x = 1/t, t \rightarrow 0$, дати лимес се своди на

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \stackrel{\text{Л.П.}}{(0/0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

б) Користимо Маклоренове развоје $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ и $\sin t = t + o(t^2)$ кад $t \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos^2 x)}{x \sin 3x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(3x + o(x^2))} = \frac{2}{3}.$$

в) Користимо Маклоренове развоје $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ и $\ln(1+t) = t + o(t)$ кад $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(-\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Пример 4.8. Наћи домен и асимптоте функције $\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1$.

Домен ове функције је $\frac{x^3}{x+1} \geq 0$, тј. $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$. Права $x = -1$ је вертикална асимптота, јер је

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 = \infty.$$

Да бисмо одредили понашање функције кад $x \rightarrow \pm\infty$, можемо користити Маклоренов полином функције $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$ кад $t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \left(1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2x - \frac{3}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

па је права $y = 2x - \frac{3}{2}$ коса асимптота кад $x \rightarrow \infty$. Слично,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \left(1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

па је права $y = -\frac{1}{2}$ хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$.

4.5 Задаци

1. Апроксимирати функцију

$$y = (x^2 - 1)e^{-2x}$$

Маклореновим полиномом четвртог степена и проценити грешку апроксимације на интервалу $[0, 1]$.

Првих пет извода су $y'(x) = -2e^{-2x}(x^2 - x - 1)$, $y''(x) = 2e^{-2x}(2x^2 - 4x - 1)$, $y'''(x) = -4e^{-2x}(2x^2 - 6x + 1)$, $y^{(4)}(x) = 16e^{-2x}(x^2 - 4x + 2)$ и $y^{(5)}(x) = -32e^{-2x}(x^2 - 5x + 4)$. Даље је $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = -4$ и $y^{(4)}(0) = 32$, па је Маклоренов полином четвртог степена

$$T_4(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4, \quad \text{тј.} \quad T_4(x) = -1 + 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4.$$

Грешка апроксимације је

$$R_4(x) = \frac{y^{(5)}(t)}{5!}x^5, \quad \text{за } t \in (0, x), \quad \text{при чему је } x \in [0, 1].$$

За оцену грешке, нађимо максимум функције $|y^{(5)}(t)|$ за $t \in (0, 1)$ и узимамо да је $x=1$:

$$\max_{t \in (0, 1)} |-32e^{-2t}(t^2 - 5t + 4)| < 32e^0 \cdot 4 = 128, \quad \text{па је } |R_4(1)| < \frac{16}{15} \quad \text{за } x \in [0, 1].$$

2. Апроксимирати функцију

$$y = \sqrt[5]{2x - 1}$$

Тејлоровим полиномом степена 3 у околини тачке $a = 1$. Користећи овај полином приближно израчунати $\sqrt[5]{1, 2}$ и проценити грешку.

Прва четири извода су $y'(x) = \frac{2}{5}(2x - 1)^{-4/5}$, $y''(x) = -\frac{16}{25}(2x - 1)^{-9/5}$, $y'''(x) = \frac{288}{125}(2x - 1)^{-14/5}$ и $y^{(4)}(x) = -8064/625(2x - 1)^{-19/5}$. Тејлоров полином трећег степена у тачки $a = 1$ је

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x - 1) + \frac{y''(1)}{2!}(x - 1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x - 1)^3, \quad \text{тј.}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{5}(x - 1) - \frac{8}{25}(x - 1)^2 + \frac{48}{125}(x - 1)^3.$$

Даље је $y(1, 1) \approx T_3(1, 1) = 1,037184$. За $1 < t < 1,1$ је $(2t - 1)^{-19/5} < 1$, па је

$$|R_3(1, 1)| < \frac{1}{4!} \frac{8064}{625} \cdot 0,1^4 \approx 5,4 \cdot 10^{-5}.$$

3. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију $y = y(x)$ дату једначином $x + y = \arctg(xy)$.

Прво приметимо да је $y = 0$ за $x = 0$. Диференцирањем дате једначине (по x) добијамо

$$1 + y' = \frac{y + xy'}{1 + (xy)^2},$$

одакле за $x = y = 0$ добијамо $y'(0) = -1$. Даљим диференцирањем добијамо

$$y'' = \frac{(y' + y' + xy'')(1 + (xy)^2) - (y + xy')2xy(y + xy')}{(1 + (xy)^2)^2},$$

одакле за $x = y = 0$ и $y'(0) = -1$ добијамо $y''(0) = -2$. Тражени Маклоренов полином је $T_2(x) = -x - x^2$.