

Први колоквијум (пример 1)

1. Израчунати интеграл $\int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^5}}$.
2. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^2 \ln(1 + 3x^2) dx$.
3. Наћи $\int_0^\pi \frac{\sin 153x}{\sin x} dx$.
4. Наћи запремину тела насталог ротацијом криве $y = (x^2 + \frac{3}{x^2})^{-3/4}$ око x -осе за $x \geq 0$.

Решења.

1. Решавамо помоћу неколико очигледних смена:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^5}} &= \left[\begin{array}{l} x = t^3 \\ dx = 3t^2 dt \end{array} \right] = \int \frac{3t^2 dt}{t^3 + t + t^5} = 3 \int \frac{t dt}{1 + t^2 + t^4} = \left[\begin{array}{l} t^2 = u \\ 2t dt = du \end{array} \right] \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{du}{1 + u + u^2} = \frac{3}{2} \int \frac{du}{(u + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = 2 \int \frac{du}{((2u + 1)/\sqrt{3})^2 + 1} = \left[\begin{array}{l} (2u + 1)/\sqrt{3} = p \\ 2 dt/\sqrt{3} = dp \end{array} \right] \\ &= \sqrt{3} \int \frac{dp}{p^2 + 1} = \sqrt{3} \operatorname{arctg} p + c = \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt{3}} + c. \end{aligned}$$

2. Овде користимо парцијалну интеграцију:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \ln(1 + 3x^2) dx &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln(1 + 3x^2) & dv = x^2 dx \\ du = \frac{6x}{1 + 3x^2} dx & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(1 + 3x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^4}{1 + 3x^2} dx = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} \int_0^1 \frac{9x^4 - 1 + 1}{3x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} \int_0^1 (3x^2 - 1) dx - \frac{2}{9} \int_0^1 \frac{dx}{1 + 3x^2} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3} dx = dt \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} (x^3 - x) \Big|_0^1 - \frac{2}{9\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9\sqrt{3}} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,32774. \end{aligned}$$

3. Означимо $I_n = \int_0^\pi \frac{\sin nx}{x} dx$ и пођимо од израза $I_n - I_{n-2}$. Ако искористимо формулу $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, тај израз се своди на

$$I_n - I_{n-2} = 2 \int_0^\pi \frac{\cos(n-1)x \sin x}{\sin x} dx = \frac{2}{n-1} \sin(n-1)x \Big|_0^\pi = 0,$$

па је $I_n = I_{n-2}$. У нашем случају је $I_{153} = I_{151} = \dots = I_1 = \int_0^\pi dx = \pi$.

4. Знамо да је запремина тела добијена ротацијом криве $y = y(x)$ око x -осе за $x \in [a, b]$ једнака $\pi \int_a^b f^2(x) dx$. У нашем случају запремина V ће бити несвојствени интеграл

$$\pi \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 3/x^2)^{3/2}} = \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x^3 dx}{(x^4 + 3)^{3/2}}.$$

Увођењем смене $x^4 + 4 = t$, $4x^3 dx = dt$, при чему је $t = 3$ када је $x = 0$ и $t = b^4 + 3$ када је $x = b$, добијамо

$$V = \frac{\pi}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^{b^4+3} t^{-3/2} dt = -\frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} t^{-1/2} \Big|_3^{b^4+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$

Први колоквијум (пример 2)

1. Израчунати $\int x^2 \operatorname{arctg} 2x^2 dx$.
2. Израчунати $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x}}$.
3. Израчунати $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.
4. Наћи дужину лука криве $y = \ln \cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Решења.

$$1. \int x^2 \operatorname{arctg} 2x^2 dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} 2x^2, \quad dv = x^2 dx, \\ du = \frac{4x}{1+4x^4} dx, \quad v = x^3/3 \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} 2x^2 - \frac{1}{3} \int \frac{4x^4 + 1 - 1}{1 + 4x^4} dx$$

$$= \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{1 + 4x^4}.$$

Даље је $\frac{1}{4x^4+1} = \frac{Ax+B}{2x^2+2x+1} + \frac{Cx+D}{2x^2-2x+1}$, одакле се добија $A = B = D = \frac{1}{2}$ и $C = -\frac{1}{2}$, па је

$$\int \frac{dx}{1+4x^4} = \frac{1}{8} \int \frac{4x+2+2}{2x^2+2x+1} dx - \frac{1}{8} \int \frac{4x-2-2}{2x^2-2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{8} \ln \frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} (2x+1) + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} (2x-1) + c.$$

Дакле, полазни интеграл је $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{24} \ln \frac{2x^2+2x+1}{2x^2-2x+1} + \frac{1}{12} \operatorname{arctg} (2x+1) + \frac{1}{12} \operatorname{arctg} (2x-1) + c$.

2. Ако уведемо Ојлерову смену $\sqrt{x^2+x} = t - x$, $x = \frac{t^2}{1+2t}$, $dx = \frac{2t(t+1)}{(2t+1)^2} dt$, полазни интеграл I се своди на

$$I = \int \frac{2t(t+1)}{t(2t+1)^2} dt = \int \frac{2t+1+1}{(2t+1)^2} dt = \int \frac{dt}{2t+1} + \int \frac{dt}{(2t+1)^2},$$

одакле сменом $2t+1 = u$, $dt = du/2$ добијамо

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2} \ln u - \frac{1}{2u} + c.$$

Враћањем на полазну променљиву добијамо

$$I = \frac{1}{2} \ln(2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1} + c.$$

Ако приметимо да је $(2\sqrt{x^2+x} + 2x + 1)(2\sqrt{x^2+x} - 2x - 1) = -1$, тада је

$$I = \frac{1}{2} \ln(2x + 2\sqrt{x^2+x} + 1) + \sqrt{x^2+x} - x + c.$$

3. Дати интеграл I је несвојствен - има неограничену горњу границу и подинтегрална функција није дефинисана за $x = 1$. Зато ћемо га написати као збир два интеграла $I = I_1 + I_2$, при чему је $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ и $I_2 = \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. Израчунајмо прво неодређени интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t, \quad x = t^2 + 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + c = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + c.$$

Тада је $I_1 = \lim_{a \rightarrow 1} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \Big|_a^2 = \frac{\pi}{2}$, и $I_2 = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \Big|_2^b = \pi - \frac{\pi}{2}$ па је $I = \pi$.

4. Дужина лука криве $y = y(x)$ за $x \in [a, b]$ се рачуна по формули $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$. У нашем случају је $1 + (y'(x))^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$, па је $L = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x dx}{1 - \sin^2 x}$. Увођењем смене $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, $t = 0$ за $x = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ за $x = \pi/4$ добијамо да је $L = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0,8814$.

Први колоквијум (пример 3)

1. Наћи неодређени интеграл $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x/2}}$. 2. Израчунати $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.
2. Наћи неодређени интеграл $\int (2x-1) \ln x \ln(x-1) dx$.
3. Наћи површину површи добијену ротацијом астроида $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ око x -осе.

Решења.

1. Означимо са I полазни интеграл. Множењем и дељењем подинтегралне функције са $e^{x/2}$ добијамо интеграл $I = \int \frac{e^{x/2}}{e^{3x/2} + 1} dx$ који се сменом $e^{x/2} = t$, $e^{x/2} dx = 2 dt$ своди на $I = 2 \int \frac{dt}{t^3 + 1}$. Даље је $\frac{1}{t^3 + 1} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2-t+1}$, одакле се добија $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$ и $C = \frac{2}{3}$, па је

$$I = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{t+1} + \frac{2}{3} \int \frac{-t+2}{t^2-t+1} dt = \frac{2}{3} \ln(t+1) - \frac{1}{3} \int \frac{2t-1-3}{t^2-t+1} dt = \frac{2}{3} \ln(t+1) - \frac{1}{3} \ln(t^2-t+1) + I_1,$$

где је $I_1 = \int \frac{dt}{(t-1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + c$, па је

$$I = \frac{2}{3} \ln(e^{x/2} + 1) - \frac{1}{3} \ln(e^x - e^{x/2} + 1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2e^{x/2} - 1}{\sqrt{3}} + c.$$

$$\begin{aligned} 2. I &= \left[\begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{(t^2-1)\sqrt{t^2+t}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{t^2+t} = tu, \quad t = \frac{1}{u^2-1} \\ dt = -2u/(u^2-1)^2 du \end{array} \right] = -4 \int \frac{du}{2u^2 - u^4} \\ &= -2 \int \frac{2-u^2+u^2}{u^2(2-u^2)} du = -2 \int \frac{du}{u^2} - 2 \int \frac{du}{2-u^2} = \frac{2}{u} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u} \right| + C \\ &= 2\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \right| + C. \end{aligned}$$

3. На полазни интеграл I примењујемо парцијалну интеграцију:

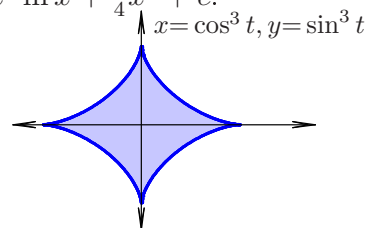
$$\begin{aligned} I &= \left[\begin{array}{ll} u = \ln x \ln(x-1) & dv = (2x-1) dx \\ du = \left(\frac{\ln(x-1)}{x} + \frac{\ln x}{x-1} \right) dx & v = x^2 - x \end{array} \right] \\ &= (x^2 - x) \ln x \ln(x-1) - \int \frac{(x^2 - x) \ln(x-1)}{x} dx - \int \frac{(x^2 - x) \ln x}{x-1} dx \\ &= (x^2 - x) \ln x \ln(x-1) - \int (x-1) \ln(x-1) dx - \int x \ln x dx. \end{aligned}$$

Даље је $\int x \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x & dv = x dx \\ du = dx/x & v = x^2/2 \end{array} \right] = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2$. Дакле,
 $I = (x^2 - x) \ln x \ln(x-1) - \frac{1}{2} (x-1)^2 \ln(x-1) + \frac{1}{4} (x-1)^2 - \frac{1}{2} x^2 \ln x + \frac{1}{4} x^2 + c$.

4. Тражена површина P је

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} y(t) \sqrt{y'(t)^2 + x'(t)^2} dt,$$

где је $x'(t) = -3 \cos^2 t \sin t$ и $y'(t) = 3 \sin^2 t \cos t$. Дакле,



$$\begin{aligned} P &= 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \sqrt{9 \sin^4 t \cos^2 t + 9 \cos^4 t \sin^2 t} dt = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3 \sin t \cos t dt \\ &= \left[\begin{array}{l} \sin t = u, \quad \cos t dt = du, \\ t = 0 \Rightarrow u = 0, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1 \end{array} \right] = 12\pi \int_0^1 u^4 du = \frac{12}{5} \pi u^5 \Big|_0^1 = \frac{12}{5} \pi. \end{aligned}$$