

Matematika 1

Zadaci – prava i ravan

Prvi deo – ispitni zadaci

1. (Oktobar 2012.) Naći prodornu tačku prave

$$p : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

kroz ravan

$$\alpha : x + 2y - z - 2 = 0$$

i odrediti ugao izmadju p i α .

Rešenje: Označimo sa $Q(x, y, z)$ prodornu tačku. Njene koordinate zadovoljavaju jednačine prave p u parametarskom obliku:

$$x = 3t - 1$$

$$y = t$$

$$z = 2t$$

za neku vrednost parametra t . Iz uslova $Q \in \alpha$ dobijamo jednačinu

$$(3t - 1) + 2(2t) - (2t) - 2 = 0,$$

odakle nalazimo $t = 1$. Zamenjujući dobijenu vrednost parametra t u parametarski oblik jednačina prave p , nalazimo koordinate prodorne tačke: $Q(2, 1, 2)$. Iz kanonskog oblika jednačina prave

$$p : \frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

možemo da pročitamo koordinate jednog vektora pravce $\vec{p} = (3, 1, 2)$, a iz jednačine ravni

$$\alpha : x + 2y - z - 2 = 0$$

jednačine jednog vektora normale na ravan $\vec{n}_\alpha = (1, 2, -1)$. Ugao izmedju p i α određen je jednakošću

$$\sin \angle(p, \alpha) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}| |\vec{n}_\alpha|}.$$

Dalje je

$$|\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha| = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 3,$$

$$|\vec{p}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14},$$

$$|\vec{n}_\alpha| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},$$

pa je

$$\sin \angle(p, \alpha) = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}}.$$

2. **(Septembar 2012.)** Odrediti jednačine prave koja sadrži tačku $A(1, 2, 1)$ i seče pravu

$$p: \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

pod pravim uglom.

Rešenje: Neka je

$$q: \frac{x-a}{A} = \frac{y-b}{B} = \frac{z}{C}$$

kanonski oblik jednačina tražene prave. Tada a , b i c predstavljaju koordinate proizvoljne tačke koja pripada pravoj q , pa iz uslova $A \in q$ sledi da možemo da izaberemo $a = 1$, $b = 2$ i $c = 1$.

Sa druge strane, koordinate jednog vektora pravca $\vec{p} = (A, B, C)$ možemo da odredimo koristeći uslove zadatka:

- (a) $p \cap q \neq \emptyset$,
 (b) $\vec{p} \perp \vec{q}$,

koje prevodimo u jednačine

- (a) $[\vec{QP}, \vec{p}, \vec{q}] = 0$,
 (b) $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$,

odnosno

- (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = -B + C = 0$,
 (b) $B + C = 0$.

Proizvoljno rešenje dobijenog sistema je

$$(x, y, z) = (t, 0, 0), \quad t \in \mathbb{R},$$

pa biranjem proizvoljne vrednosti parametra t (u ovom slučaju je $t \neq 0$, pošto je $B = C = 0$), dobijamo jedan od vektora pravca prave q . Na primer, za $t = 1$, jednačine prave q su

$$q: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{0}.$$

3. **(Jun 2012.)** Kroz tačku $A(-1, -1, 3)$ postaviti pravu koja seče pravu

$$p: \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$$

pod uglom od 60° .

Rešenje (Dušan Djukić): Nadjimo prvo normalu n iz A na pravu $p = (0, -2, 3) + t(2, -1, 1)$. Ravan π kroz A normalna na p je

$$2x - y + z = 2(-1) - (-1) + 3 = 2,$$

a presek $\pi \cap p$ je tačka P oblika

$$P(x, y, z) = (2t, -t - 2, t + 3)$$

za koju je

$$2 \cdot 2t - (-t - 2) + (t + 3) = 6t + 5 = 2,$$

dakle $t = -\frac{1}{2}$ i $P(-1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$. Prava n je određena tačkama A i P . Tražena prava q seče p u tački Q takvoj da je

$$\frac{PA}{PQ} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3},$$

a $PA = \frac{1}{2}|(0, 1, 1)| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dakle $Q = P + t(2, -1, 1)$ i $PQ = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, odakle nalazimo $t = \pm \frac{1}{2}$ i $Q = Q_1(0, -2, 3)$ ili $Q = Q_2(-2, -1, 2)$. Tražene prave su

$$q_1 = AQ_1 = (-1, -1, 3) + s(1, -1, 0)$$

i

$$q_2 = AQ_2 = (-1, -1, 3) + s(1, 0, 1).$$

4. **(Oktobar 2012.)** Odrediti jednačinu ravni π koja sadrži tačku $A(0, 0, -1)$ i sadrži pravu

$$p : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{1},$$

a zatim odrediti rastojanje tačke $B(3, 1, 1)$ od ravni π .

5. **(Jul 2012.)** Date su tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $D(0, 0, 0)$ i $E(1, 2, 1)$. Ako je ravan π određena tačkama A , B i C , a prava p tačkama D i E , odrediti ugao između p i π .
6. **(Februar 2012.)** Napisati jednačinu ravni koja sadrži prave

$$p : \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{1}$$

i

$$q : \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{2}.$$

7. **(Januar 2012.)** Napisati jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $A(2, 0, -1)$ i normalna je na ravnima

$$\alpha : 2x - y - 3 = 0$$

i

$$\beta : x + y - z + 1 = 0.$$