

Matematika 1

Zadaci

Matrice

1. (Oktobar 2012.) Rešiti matričnu jednačinu

$$XA = B - 3X$$

po nepoznatoj matrici X , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rešenje: $XA = B - 3X$

$$XA + 3X = B$$

$$X(A + 3E) = B$$

$$XC = B$$

Ovde je sa C označena matrica $A + 3E$, a sa E jedinična matrica reda tri.

Dakle

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Pošto je $\det C = 6$, matrica C je invertibilna, pa rešenje jednačine $XC = B$ dobijamo njenim množenjem sa C^{-1} sa desne strane, odakle je

$$X = BC^{-1}.$$

Pri tom je $C^{-1} = \frac{1}{\det C} \text{adj} C$.

$$\text{adj} C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^T,$$

gde je

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 13, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-3, \quad C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -4, \dots$$

Dakle,

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 13 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

pa je

$$X = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 5 \\ 20 & -8 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. Rešiti matričnu jednačinu

$$AXB^{-1} = B$$

po nepoznatoj matrici X , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. **(Februar 2012.)** Rešiti matričnu jednačinu

$$AX + B = A + 2X$$

po nepoznatoj matrici X , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Rešiti matričnu jednačinu

$$(A^T X B^{-1})^{-1} = B X^{-1} + E$$

po nepoznatoj matrici X , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

a sa E je označena jedinična matrica trećeg reda.

5. Rešiti matričnu jednačinu

$$(X A^{-1})^{-1} + 2B = C(X^{-1} + 3E)$$

po nepoznatoj matrici X , ako su date matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

a sa E je označena jedinična matrica trećeg reda.

6. **(Jun 2012.)** Date su matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & a \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Odrediti vrednost realnog parametra a za koju matrica $A - B$ ima najmanji rang.

(b) Za $a = 2$ rešiti matričnu jednačinu

$$XA = B - 3X$$

po nepoznatoj matrici X .

7. Odrediti rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & a \end{bmatrix}$$

diskusijom po realnom parametru a .

8. Odrediti rang matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -5 & -3 & 10 \\ 2 & -1 & a & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & -2 & a \\ 5 & -4 & 13 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

diskusijom po realnom parametru a .