

Matematika 1

Zadaci

Sistemi linearnih jednačina

1. (Septembar 2012.) Rešiti sistem linearnih jednačina

$$x + y + z = a$$

$$x + (a + 1)y + z = 2a$$

$$x + y + az = -a$$

diskusijom po realnom parametru a .

Rešenje: Zadatak ćemo rešiti primenom Kramerovog pravila.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \dots = a(a-1)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a+1 & 1 \\ -a & 1 & a \end{vmatrix} = \dots = a(a^2+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & -a & a \end{vmatrix} = \dots = a(a-1)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a+1 & 2a \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = \dots = 2a^2$$

Diskusija po parametru a :

- (a) Ako je $a \neq 0$ i $a \neq 1$, onda je $D \neq 0$, pa sistem ima jedinstveno rešenje:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{a^2+1}{a-1}, \quad y = \frac{D_y}{D} = 1, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{2a}{a-1}.$$

- (b) Ako je $a = 1$, onda je $D = 0$ i $D_x \neq 0$, pa je sistem nemoguć.
(c) Ako je $a = 0$, onda je $D = D_x = D_y = D_z = 0$, pa je sistem ili neodređen ili nemoguć, što proveravamo Gausovim metodom:

$$x + y + z = 0$$

$$x + y + z = 0$$

$$x + y = 0.$$

Sistem je ekvivalentan sistemu

$$x + y = 0$$

$$z = 0,$$

pa ima beskonačno rešenja, koja su oblika

$$(x, y, z) = (t, -t, 0), \quad t \in R.$$

2. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$ax + y + 2az = -1$$

$$3x + (a + 2)y + 6z = 1$$

$$(a + 3)x + 4y + 8z = -2$$

diskusijom po realnom parametru a .

3. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$2ax + 4y + 2z = 2$$

$$3x + (a - 1)y + 2z = 5$$

$$2x + 2y + 3z = 6$$

diskusijom po realnom parametru a .

4. Primenim Gausovog metoda rešiti sistem linearnih jednačina

$$x + y + 2z + 3t - 2u = -2$$

$$2x + y - 4z - t + 5u = 2$$

$$x - y - 14z - 11t + 16u = 10$$

$$7x + 5y - 2z + 7t + au = -1$$

diskusijom po realnom parametru a .

5. Primenim Gausovog metoda rešiti sistem linearnih jednačina

$$x - 2y + z + 3t - 2u = 2$$

$$3x - 5y + 5z - 2t + 4u = 3$$

$$x - y + 3z - 8t + 8u = -1$$

$$7x - 11y + 13z - 12t + 4au = -3$$

diskusijom po realnom parametru a .

6. Primenim Kroneker-Kapelijsve teoreme ispitati saglasnost sistema linearnih jednačina

$$x - y + 3z - t - 2u = 3$$

$$-2x + y - 2z + 2t - 3u = -2$$

$$3x + y + z + 3t + 2u = 3$$

$$2x + y + 2z + 4t + au = b$$

diskusijom po realnim parametrima a i b .

7. Rešiti sistem linearnih jednačina

$$x + y + 5z = -5$$

$$x - 3z = 2$$

$$3x - y - z = -3$$

primenom matrične jednačine.