

Matematika 1

Ispitivanje toka funkcije

Prvi deo – ispitni zadaci

1. (Oktobar 2012.) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{\ln x - 1}$$

i skicirati njen grafik.

Rešenje:

- (a) **Domen.**

Logaritamska funkcija je definisana samo za pozitivne vrednosti argumenta i deljenje nulom nije definisano, pa je funkcija $f(x)$ definisana za sve realne brojeve koji su rešenja nejednačina

$$x > 0, \quad \ln x - 1 \neq 0.$$

Odatle je

$$D_f = (0, e) \cup (e, +\infty).$$

- (b) **Nule i znak.**

$f(x) = 0$ akko $x^2 = 0$ i $x \in D_f$, pa funkcija nema nule.

$f(x) > 0$ akko $\ln x - 1 > 0$ akko $x > e$. Slično, $f(x) < 0$ akko $0 < x < e$.

- (c) **Parnost, neprekidnost, periodičnost.**

Funkcija nije ni parna ni neparna, pošto domen nije simetričan u odnosu na tačku $x = 0$. Funkcija je neprekidna na domenu, kao kompozicija elementarnih funkcija. Nije periodična).

- (d) **Asimptote.**

Koriste'ci Lopitalovo pravilo, dobijamo $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = +\infty$, pa funkcija nema kosu (a samim tim ni horizontalnu) asimptotu.

Na osnovu oblasti definisanosti zaključujemo da su kandidati za vertikalne asimptote prave $x = 0$ (sa desne strane) i $x = e$. Kako je $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ ($\ln 0^+ = -\infty$), prava $x = 0$ nije kosa asimptota. Sa druge strane, $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = -\infty$ ($\ln e^- = 1^-$) i $\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = +\infty$, pa je prava $x = e$ vertikalna asimptota.

- (e) **Ekstremne vrednosti i monotonost.**

$f'(x) = \frac{x(2 \ln x - 3)}{(\ln x - 1)^2}$, pa je kandidat za ekstremnu vrednost tačka $x = e^{\frac{3}{2}}$.

Znak funkcije je na D_f jednak znaku izraza $2 \ln x - 3$, pa funkcija opada na intervalima $(0, e)$ i $(e, e^{\frac{3}{2}})$, a raste na intervalu $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$. Dakle, u tački $x = e^{\frac{3}{2}}$ funkcija dostiže minimum.

(f) **Prevojne tačke i konveksnost.**

$f''(x) = \frac{2\ln^2 x - 7\ln x + 7}{(\ln x - 1)^3}$. Jednačinu $2\ln^2 x - 7\ln x + 7 = 0$ rešavamo uvođenjem smene $t = \ln x$. Tako dobijamo jednačinu $2t^2 - 7t + 7 = 0$, koja nema realna rešenja (pošto je diskriminanta negativna), pa je $2\ln^2 x - 7\ln x + 7 > 0$ za svako $x \in D_f$. Odatle dobijamo da funkcija nema prevojne tačke i da je na D_f znak funkcije f'' jednak znaku izraza $\ln x - 1$. Zbog toga je funkcija $f(x)$ konkavna na intervalu $(0, e)$, a konveksna na intervalu $(e, +\infty)$.

2. (Septembar 2012.) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = \ln \frac{x+2}{x+1}$$

i skicirati njen grafik.

Rešenje:

(a) **Domen.**

Funkcija $f(x)$ je definisana za rešenja nejednačine

$$\frac{x+2}{x+1} > 0$$

pa je

$$D_f = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty).$$

(b) **Nule i znak.**

$f(x) = 0$ ako je $\frac{x+2}{x+1} = 1$, pa funkcija nema nule.

$f(x) > 0$ akko $\frac{x+2}{x+1} > 1$ akko $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{1}{x+1} > 0$. Dakle, $f(x) > 0$ akko $x > -1$. Slično, $f(x) < 0$ akko $x < -2$.

(c) **Parnost, neprekidnost, periodičnost.**

Funkcija nije ni parna ni neparna, pošto domen nije simetričan u odnosu na tačku $x = 0$. Funkcija je neprekidna na domenu, kao kompozicija elementarnih funkcija. Nije periodična (npr. ima horizontalnu asimptotu).

(d) **Asimptote.**

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0$, pa funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = 0$. Kandidati za vertikalnu asimptotu su prave $x = -2$ i $x = -1$. Kako je $\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \ln 0^+ = -\infty$, a $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \ln +\infty = +\infty$, te prave su asimptote.

(e) **Ekstremne vrednosti i monotonost.**

$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)}$, pa funkcija nema ekstremne vrednosti. Opada na oba intervala domena.

(f) **Prevojne tačke i konveksnost.**

$f''(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x+2)^2}$, pa funkcija nema prevojne tačke ($-\frac{3}{2} \notin D_f$).

Konkavna je na intervalu $(-\infty, -2)$, a konveksna na intervalu $(-1, +\infty)$.

3. (Jun 2012.) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$$

i skicirati njen grafik.

Rešenje (Dušan Djukić): Domen funkcije $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$ je domen eksponenta, tj. $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Nema nula i uvek je pozitivna. Za $x \rightarrow \pm 1+$ ima vertikalne asimptote $x = \pm 1$, a za $x \rightarrow \pm \infty$ ima horizontalnu asimptotu $y = 1$.

Izvod je $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2} e^{\frac{1}{x^2-1}}$, što je suprotnog znaka od x : f je opadajuća za $0 < x < 1$ i $x > 1$, a rastuća za $-1 < x < 0$ i $x < -1$. U tački $x = 0$ imamo lokalni maksimum.

Drugi izvod je $f''(x) = \frac{6x^4-2}{(x^2-1)^4} e^{\frac{1}{x^2-1}}$; $f''(x) < 0$ i f je konkavna za $x \in (-\sqrt[4]{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{\frac{1}{3}})$, a $f''(x) > 0$ i f je konveksna van tog intervala. Prevojne tačke su $x = \pm \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$.

4. (**Oktobar 2012.**) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{\ln x + 1}$$

i skicirati njen grafik.

5. (**Jul 2012.**) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x-3}}$$

i skicirati njen grafik.

6. (**Februar 2012.**) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}$$

i skicirati njen grafik.

7. (**Januar 2012.**) Ispitati tok funkcije

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln^2(x+2)}$$

i skicirati njen grafik.