

Matematika 1

Granična vrednost niza i funkcije, Lopitalovo pravilo, Tejlorov i Maklorenov polinom, hodograf vektor-funkcije

Prvi deo – ispitni zadaci

1. (Februar 2012.) Izračunati

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n^3 + 3n^2 - n + 2}{2n^3 - n^2 + 3} \right)^{3n-2}.$$

2. (Jun 2012.) Izračunati

$$\lim_{x \rightarrow 6} (x - 5)^{\frac{1}{6-x}}.$$

Rešenje (Dušan Djukić): Označimo $y = (x - 5)^{\frac{1}{6-x}}$. Tada je $\ln y = \frac{\ln(x-5)}{6-x}$ i po Lopitalovoj teoremi $\lim_{x \rightarrow 6} \ln y = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{5-x} = -1$. Sledi da je $\lim_{x \rightarrow 6} y = e^{-1}$.

3. (Oktobar 2012.) Izračunati

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - \sin x}{\arctg^2 x}.$$

4. (Oktobar 2012.) Data je funkcija

$$f(x) = e^x + 2x^2$$

- (a) Aproksimirati funkciju $f(x)$ Maklorenovim polinomom drugog stepena.
(b) Koristeći dobijeni polinom, izračunati približno $e^{\frac{102}{10000}}$.

Rešenje:

- (a) Maklorenov polinom drugog stepena funkcije $f(x)$ je

$$M_{2,f}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2.$$

Kako je

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{x+2x^2})' = e^{x+2x^2}(x+2x^2)' = (1+4x)e^{x+2x^2}, \\ f''(x) &= ((1+4x)e^{x+2x^2})' = (1+4x)'e^{x+2x^2} + (1+4x)(e^{x+2x^2})' = \\ &= 4e^{x+2x^2} + (1+4x)^2 e^{x+2x^2} = (5+8x+16x^2)e^{x+2x^2}, \\ \text{dobijamo } f(0) &= e^0 = 1, f'(0) = 1 \text{ i } f''(0) = 5, \text{ pa je} \end{aligned}$$

$$M_{2,f}(x) = 1 + x + \frac{5}{2}x^2.$$

(b) Pošto je $e^{\frac{102}{10000}} = e^{\frac{1}{100} + 2\frac{1}{100^2}}$, lako se uočava da je

$$e^{\frac{102}{10000}} = f\left(\frac{1}{100}\right) \approx M_{2,f}\left(\frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{1}{100} + \frac{5}{2} \frac{1}{100^2}.$$

5. **(Januar 2012.)** Aproximirati funkciju

$$f(x) = tg(x-1)$$

u okolini tačke $a = 1$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena i proceniti grešku aproksimacije za $x \in [\frac{9}{10}, \frac{11}{10}]$.

6. **(Jul 2012.)** Aproximirati funkciju

$$f(x) = \ln(x-2)$$

Tejlorovim polinomom trećeg stepena u okolini tačke $a = 3$. Koristeći dobijeni razvoj, izračunati približno $\ln \frac{6}{5}$.

7. **(Septembar 2012.)** Linija L je hodograf vektor-funkcije

$$\vec{r}(t) = \ln t \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j} + 2t \cdot \vec{k}.$$

Odrediti vektor normale, krivinu i torziju linije L u proizvoljnoj tački.

Rešenje: $\dot{\vec{r}} = (\frac{1}{t}, 2t, 2)$,

$$\ddot{\vec{r}} = (-\frac{1}{t^2}, 2, 0),$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\frac{2}{t^3}, 0, 0).$$

Primetimo da je $t > 0$. Kako je

$$|\dot{\vec{r}}| = \dots = \sqrt{\frac{(2t^2 + 1)^2}{t^2}} = \frac{(2t^2 + 1)}{t},$$

dobijamo

$$\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \left(\frac{1}{2t^2 + 1}, 1 - \frac{1}{2t^2 + 1}, \frac{2t}{2t^2 + 1}\right).$$

Dalje je

$$\dot{\tau} = \left(\frac{4t}{(2t^2 + 1)^2}, -\frac{4t}{(2t^2 + 1)^2}, \frac{-4t^2 + 2}{(2t^2 + 1)^2}\right).$$

Posto je rezultat normiranja vektora $\dot{\tau}$ isti kao i rezultat normiranja njemu paralelnog vektora $\vec{q} = (4t, -4t, -4t^2 + 2)$, a $|\vec{q}| = 4t^2 + 2$, dobijamo

$$\vec{n} = \left(\frac{2t}{2t^2 + 1}, -\frac{2t}{2t^2 + 1}, \frac{-2t^2 + 1}{2t^2 + 1}\right).$$

Posto je $\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \dots = (-4, \frac{2}{t^2}, \frac{4}{t})$ i $|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}| = 2\frac{2t^2+1}{t^2}$, dobijamo

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3} = 2\frac{t}{(2t^2 + 1)^2}.$$

Na kraju, iz $[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}] = \dots = \frac{8}{t^3}$ sledi da je

$$K = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = 2\frac{t}{(2t^2 + 1)^2}.$$