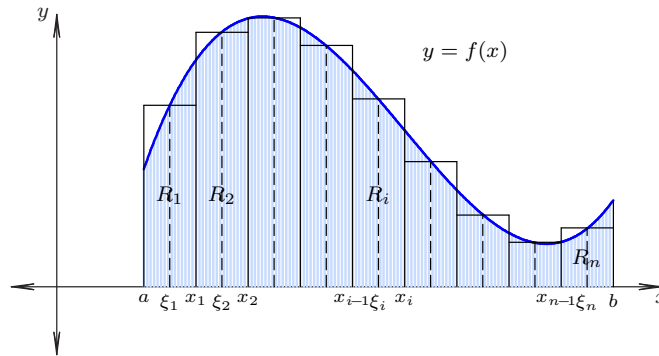


2 Интегралы - одређени, несвојствени, примене

2.1 Одређени интеграл

Нека је $f(x)$ непрекидна и ненегативна функција дефинисана на затвореном интервалу $[a, b]$. Желимо да нађемо површину дела равни S омеђену функцијом $y = f(x)$, x -осом и правама $x = a$ и $x = b$.



Поделимо интервал $[a, b]$ у n подинтервала дефинисаних тачкама $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Означимо овакву поделу интервала са P . Дужина подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, па су у општем случају ови подинтервали различите дужине. Дужина највећег поинтервала представља дијаметар поделе P и означава са $\|P\|$,

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}.$$

Нека су $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ изабране тачке. Тада површину S апроксимирамо збиром површина правоугаоника R_i ,

$$S \approx \Delta x_1 f(\xi_1) + \Delta x_2 f(\xi_2) + \dots + \Delta x_n f(\xi_n) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Ову суму називамо *Римановом сумом*.

Када подела P тежи „најфинијој могућој”, тј. када $\|P\| \rightarrow 0$, добијамо

$$S = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Ако овај лимес постоји и ако је коначан за ма какву поделу P , зваћемо га *одређени интеграл* у *Римановом смислу функције $f(x)$* у границама од a до b и означаваћемо га са

$$\int_a^b f(x) dx.$$

У том случају кажемо да је функција $f(x)$ интегрална на интервалу $[a, b]$. Да би произвољна функција била интегрална на неком интервалу $[a, b]$, довољно је да је непрекидна на њему, или да има коначан број прекида I врсте.

Важније особине одређеног интеграла:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$;
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (a < c < b)$;

- ако је f парна функција, важи $\int_a^a f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$;
- ако је f непарна функција, важи $\int_a^a f(x) dx = 0$;
- $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx \pm \beta \int_a^b g(x) dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Теорема 2.1. (Њутн-Лајбницова формула.) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$, тада на том интервалу постоји неодређени интеграл $\int_a^b f(x) dx = F(x) + C$ ($C = \text{const}$) и важи

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Теорема 2.2. (Смена променљиве код одређеног интеграла.) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$ непрекидна заједно са својим изводом $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, где је $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, тада је

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Теорема 2.3. (Парцијална интеграција код одређеног интеграла.) Ако су функције $u = u(x)$ и $v = v(x)$ диференцијабилне на одсечку $[a, b]$, тада је

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 2.1. Израчунати $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \cos x}$.

$$I = \left[\begin{array}{l} \text{tg } \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2 dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{\frac{2 dt}{1+t^2}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg } \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arctg } \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 2.2. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^2 \ln(1 + 3x^2) dx$.

Овде користимо парцијалну интеграцију:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \ln(1 + 3x^2) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \ln(1 + 3x^2) \quad dv = x^2 dx \\ du = \frac{6x}{1 + 3x^2} dx \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] \\ &= \frac{x^3}{3} \ln(1 + 3x^2) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{x^4}{1 + 3x^2} dx = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} \int_0^1 \frac{9x^4 - 1 + 1}{3x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} \int_0^1 (3x^2 - 1) dx - \frac{2}{9} \int_0^1 \frac{dx}{1 + 3x^2} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3} dx = dt \end{array} \right] \\ &= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9} (x^3 - x) \Big|_0^1 - \frac{2}{9\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2}{9\sqrt{3}} \text{arctg } t \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{2\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,32774. \end{aligned}$$

Пример 2.3. Израчунати $I_2 = \int_0^{\pi/4} (\cos 2x)^{3/2} \cos x dx$.

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\pi/4} (1 - 2\sin^2 x)^{3/2} \cos x dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2t^2)^{3/2} dt = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}t = \sin u \\ \sqrt{2} dt = \cos u du \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 u)^{3/2} \cos u du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 u du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2u + \frac{1 + \cos 4u}{2} \right) du = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{3}{2}u + \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример 2.4. Израчунати $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

Показано је код неодређених интеграла да је

$$\int \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n},$$

па је

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

при чему је

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}, \quad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = 1.$$

За $n = 2k$ важи

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2k(2k-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Слично, за $n = 2k+1$ важи

$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \dots = \frac{2k(2k-2)\dots 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Пример 2.5. Наћи $\int_0^{\pi} \frac{\sin 153x}{\sin x} \, dx$.

Означимо $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} \, dx$ и пођимо од израза $I_n - I_{n-2}$. Ако искористимо формулу $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, тај израз се своди на

$$I_n - I_{n-2} = 2 \int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \, dx = \frac{2}{n-1} \sin(n-1)x \Big|_0^{\pi} = 0,$$

па је $I_n = I_{n-2}$. У нашем случају је $I_{153} = I_{151} = \dots = I_1 = \int_0^{\pi} dx = \pi$.

2.2 Несвојствени интеграл

Постоје две врсте несвојствених интеграла:

(1) Интеграл неограничене функције (несвојствени интеграл прве врсте)

Ако је $f(x)$ неограничена у тачки $c \in [a, b]$ и непрекидна за $x \in [a, c) \cup (c, b]$, тада је

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) \, dx + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{c+\delta}^b f(x) \, dx.$$

(2) Интеграл са бесконачним границама (несвојствени интеграл друге врсте).

Ако је $f(x)$ непрекидна за $x \in [a, +\infty)$, важи

$$\int_a^{+\infty} f(x) \, dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Аналогно се дефинише на интервалу $(-\infty, b)$.

Ако лимеси постоје и коначни су кажемо да интеграл конвергира, а у супротном да дивергира.

Нека је $a < c < b$. Интеграл $\int_a^b f(x) \, dx$ конвергира ако и само конвергира $\int_c^b f(x) \, dx$ и важи

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Пример 2.6. Израчунати $I_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^0 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}} \, dx$.

Одговарајући неодређени интеграл је

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{2x-1+3}{\sqrt{x^2-x}} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x}} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1/2)^2-1/4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2-x}}{1/2} + \frac{3}{2} \ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x}) + C, \end{aligned}$$

па је

$$I_3 = \left(\sqrt{x^2-x} + \frac{3}{2} \ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x}) \right) \Big|_{-1/2}^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \ln(2-\sqrt{3}) \approx 1,10941.$$

Пример 2.7. Израчунати $\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Дати интеграл I је несвојствен - има неограничену горњу границу и подинтегрална функција није дефинисана за $x = 1$. Зато ћемо га написати као збир два интеграла $I = I_1 + I_2$, при чему је $I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$ и $I_2 = \int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$. Израчунајмо прво неодређени интеграл

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = t, \quad x = t^2 + 1 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = 2 \operatorname{arctg} t + c = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + c.$$

Тада је $I_1 = \lim_{a \rightarrow 1} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \Big|_a^2 = \frac{\pi}{2}$, и $I_2 = \lim_{b \rightarrow \infty} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} \Big|_2^b = \pi - \frac{\pi}{2}$ па је $I = \pi$.

Пример 2.8. Израчунати $I = \int_1^\infty \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = \frac{x dx}{(1+x^2)^2}, \\ du = \frac{dx}{x}, \quad v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} \Big|_1^b + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{dx}{x(1+x^2)} \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{2} \int_1^b \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx \right) = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_1^b \frac{dx}{x} - \int_1^b \frac{x dx}{1+x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln |x| - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| \right) \Big|_1^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\ln b - \frac{1}{2} (\ln(1+b^2) - \ln 2) \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{4}. \end{aligned}$$

Пример 2.9. Израчунати $I = \int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \left[\begin{array}{l} x-1/x = t, \quad (1-1/x^2) dx = dt, \\ (x-1/x)^2 = t^2 \Rightarrow x^2+1/x^2 = t^2+2, \\ x=0 \Rightarrow t=-\infty, \quad x=\infty \Rightarrow t=\infty \end{array} \right] = \int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dt}{1+t^2} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_a^0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{b \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_0^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Пример 2.10. Израчунати $\int_0^\infty x^{10} e^{-x} dx$.

Полазећи од интеграла

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x^n, \quad dv = e^{-x} dx, \\ du = nx^{n-1} dx, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-x^n e^{-x} \Big|_0^b \right) + n I_{n-1} = n I_{n-1},$$

при чему је $I_0 = 1$, добијамо да је $I_n = n!$. Дакле, $I_{10} = 10!$.

Интеграл I_n дефинише *Гама функцију*, која представља продужење факторијел функције.

2.3 Примена интеграла

Површина равног лика

Нека је γ непрекидна крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата функцијом $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$, тада је површина између лука криве $f(x)$ и x -осе на интервалу $[a, b]$

$$P = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Последично, површина фигуре у равни одређена кривим $f_1(x)$ и $f_2(x)$ је

$$P = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)| dx.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тада је површина фигуре одређене кривом γ за $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и нека је P површина између криве γ и x -осе. Разликује наредне случајеве.

(1) Ако је $x(t)$ растућа и $y(t) \geq 0$ или је $x(t)$ опадајућа и $y(t) \leq 0$, онда је

$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt.$$

(2) Ако је $x(t)$ опадајућа и $y(t) \geq 0$ или је $x(t)$ растућа и $y(t) \leq 0$, онда је

$$P = - \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t) dt.$$

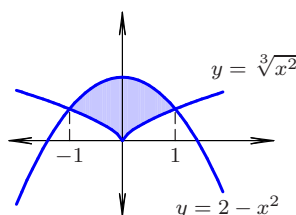
Пример 2.11. Израчунати површину омеђену кривим $y = 2 - x^2$ и $y^3 = x^2$.

Нађимо пресечне тачке датих кривих:

$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - y^3 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \Rightarrow y = 1, x = \pm 1,$$

па је површина између кривих $y = 2 - x^2$ и $y = \sqrt[3]{x^2}$

$$P = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}) dx = 2 \int_0^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}) dx = \frac{32}{15}.$$



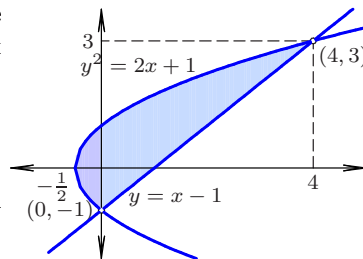
Пример 2.12. Израчунати површину омеђену кривим $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.

Крива $y^2 = 2(x + \frac{1}{2})$ је парабола са теменом $(-\frac{1}{2}, 0)$ која сече y -осу у тачкама $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Нађимо пресечне тачке датих кривих:

$$\begin{cases} y^2 = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, y_1 = -1; \\ x_2 = 4, y_2 = 3. \end{cases}$$

Тражену површину P налазимо као збир површине P_1 између кривих $y = -\sqrt{2x + 1}$ и $y = \sqrt{2x + 1}$ на $[-\frac{1}{2}, 0]$ и површине P_2 између кривих $y = x - 1$ и $y = \sqrt{2x + 1}$ на $[0, 4]$. Дакле,

$$P = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (\sqrt{2x + 1} - (-\sqrt{2x + 1})) dx + \int_0^4 (\sqrt{2x + 1} - (x - 1)) dx = \dots = \frac{16}{3}.$$



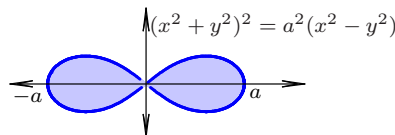
Други начин би био да посматрамо дате криве као функције од y : $x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$, $x = y + 1$, па да површину рачунамо као интеграл дуж y -осе:

$$P = \int_{-1}^3 \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2} \right) dy = \dots = \frac{16}{3}.$$

Пример 2.13. Наћи површину фигуре ограничене кривом $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Бернулијевом лемнискатом).

Преласком на поларне координате $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$ добијамо једначину $(\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^2 = a^2(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi)$, одакле је $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$. Видимо да мора бити $\cos 2\varphi \geq 0$, тј. $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Због периодичности функције $\cos 2\varphi$ тражена површина је

$$P = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2 d\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = 2a^2 \frac{\sin 2\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

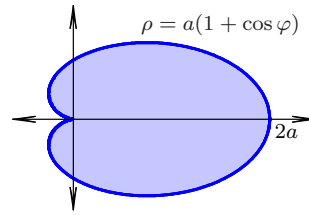


Пример 2.14. Наћи површину кардиоиде $\rho = a(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $a > 0$.

Тражена површина је

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \varphi + \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi$$

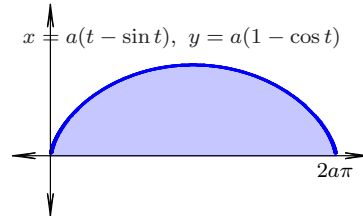
$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin \varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} a^2 \pi.$$



Пример 2.15. Наћи површину P ограничену једним луком циклоиде $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и x -осом ($a > 0$ и $0 \leq t \leq 2\pi$).

$$P = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t) dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2 \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = 3a^2 \pi.$$



Запремина обртног тела

Нека је γ ненегативна непрекидна крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тада је запремина тела насталог ротацијом криве γ око x -осе

$$V = \pi \int_a^b y^2(x) dx,$$

а запремина тела насталог ротацијом криве око y -осе је

$$V = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Запремина тела насталог ротацијом криве γ око поларне осе је

$$V = \frac{2}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и нека је $x(t)$ растућа на $[t_1, t_2]$. Запремина тела насталог ротацијом криве γ око x -осе је

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t) dt.$$

Пример 2.16. Крива $y = \sqrt{x} \cdot \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) ротира око x -осе. Одредити запремину добијеног тела.

Тражена запремина је

$$V = \pi \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \cos 2x dx.$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = x \quad dv = \cos 2x dx \\ du = dx \quad v = \sin 2x/2 \end{array} \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{\pi}{2} \left[\frac{x \sin 2x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x dx \right] = \frac{\pi^3}{4} \approx 7,7516.$$

Пример 2.17. Наћи запремину тела насталог ротацијом криве $y = \left(x^2 + \frac{3}{x^2}\right)^{-3/4}$ око x -осе за $x \geq 0$.

Знамо да је запремина тела добијена ротацијом криве $y = y(x)$ око x -осе за $x \in [a, b]$ једнака $\pi \int_a^b f^2(x) dx$. У нашем случају запремина V ће бити несвојствени интеграл

$$\pi \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3/x^2)^{3/2}} = \pi \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x^3 dx}{(x^4 + 3)^{3/2}}.$$

Увођењем смене $x^4 + 4 = t$, $4x^3 dx = dt$, при чему је $t = 3$ када је $x = 0$ и $t = b^4 + 3$ када је $x = b$, добијамо

$$V = \frac{\pi}{4} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_3^{b^4+3} t^{-3/2} dt = -\frac{\pi}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} t^{-1/2} \Big|_3^{b^4+3} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0,9069.$$

Пример 2.18. Наћи запремину тела које настаје ротацијом кардиоиде $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ око поларне осе.

Тело описује горњи лук кардиоиде, па је $\varphi \in [0, \pi]$. Дакле, запремина је

$$\begin{aligned} V &= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi \rho^3 \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi \, d\varphi = \left[\begin{array}{l} 1 + \cos \varphi = t, \quad -\sin \varphi \, d\varphi = dt, \\ \varphi = 0 \Rightarrow t = 2, \quad \varphi = \pi \Rightarrow t = 0 \end{array} \right] \\ &= \frac{2a^3\pi}{3} \int_0^2 t^3 (-dt) = \frac{2a^3\pi}{3} \int_0^2 t^3 \, dt = \frac{2a^3\pi}{3} \frac{t^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{8a^3\pi}{3}. \end{aligned}$$

Дужина лука криве

Нека је γ глатка крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Тада је дужина лука криве γ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2} \, dx.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Дужина лука криве γ је

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2} \, d\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Дужина лука криве γ је

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

Пример 2.19. Наћи дужину лука криве $y = \ln \cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Дужина лука криве $y = y(x)$ за $x \in [a, b]$ се рачуна по формули $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} \, dx$. У нашем случају је $1 + (y'(x))^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$, па је

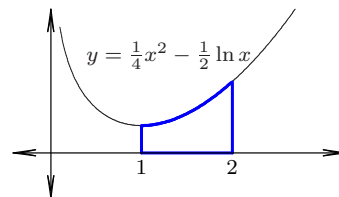
$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x}.$$

Увођењем смене $\sin x = t$, $\cos x \, dx = dt$, $t = 0$ за $x = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ за $x = \pi/4$ добијамо да је

$$L = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| \Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0,8814.$$

Пример 2.20. Наћи обим фигуре одређене кривом $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ и правима $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$. Дужина лука L дате криве за $x \in [1, 2]$ је

$$\begin{aligned} L &= \int_1^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^2} \, dx = \int_1^2 \sqrt{\frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2} \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + \ln x\right) \Big|_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$



Дужина дужи од тачке $(1, 0)$ до тачке $(1, y(1))$ је $y(1) = \frac{1}{4}$; дужина дужи од тачке $(2, 0)$ до тачке $(2, y(2))$ је $y(2) = 1 - \frac{1}{2} \ln 2$. Коначно, дужина сегмента на x -оси од тачке $(1, 0)$ до тачке $(2, 0)$ је 1, па је тражени обим

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} \ln 2 + 1 = 3.$$

Пример 2.21. Наћи дужину лука криве $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$, $a \neq b$.

Преласком на параметарски облик криве $x = a \cos^3 t$, $y = b \sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$, добијамо да је њена дужина лука

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9b^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
&= 3 \int_0^{2\pi} |\cos t \sin t| \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt = 12 \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t \sqrt{a^2 \frac{1 + \cos 2t}{2} + b^2 \frac{1 - \cos 2t}{2}} dt \\
&= \frac{6}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2) \cos 2t} dt = \left[\cos 2t = u, \quad -2 \sin 2t dt = du, \right. \\
&\quad \left. t = 0 \Rightarrow u = 1, \quad t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = -1 \right] \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sqrt{a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)u} du = \frac{3}{\sqrt{2}(a^2 - b^2)} \frac{(a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)u)^{3/2}}{3/2} \Big|_{-1}^1 = \frac{4(a^2 + ab + b^2)}{a + b}.
\end{aligned}$$

Површина обртног тела

Нека је γ ненегативна глатка крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, тада је површина тела насталог ротацијом криве γ око x -осе

$$P = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Површина тела насталог ротацијом криве γ око поларне осе је

$$P = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin \varphi \sqrt{\rho(\varphi)^2 + \rho'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$. Површина тела насталог ротацијом криве γ око x -осе је

$$P = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$$

Пример 2.22. Наћи површину тела насталог ротацијом криве $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ око x -осе за $x \in [-a, a]$.

Како је $\operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}$, то је $y' = \frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}$, па је тражена површина

$$\begin{aligned}
&2\pi \int_{-a}^a a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{e^{x/a} - e^{-x/a}}{2}\right)^2} dx = 2a\pi \int_{-a}^a \frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2} \sqrt{\left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)^2} dx \\
&= 2a\pi \int_{-a}^a \left(\frac{e^{x/a} + e^{-x/a}}{2}\right)^2 dx = \frac{a\pi}{2} \int_{-a}^a (e^{2x/a} + 2 + e^{-2x/a}) dx \\
&= \frac{a\pi}{2} \left(\frac{e^{2x/a}}{2/a} + 2x + \frac{e^{-2x/a}}{-2/a}\right) \Big|_{-a}^a = \frac{a\pi}{2} (ae^2 - ae^{-2} + 4a) = a^2\pi(\operatorname{sh} 2 + 2).
\end{aligned}$$

Пример 2.23. Наћи површину P обртног тела које настаје ротацијом лемнискате $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ око поларне осе.

На основу симетрије је

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/4} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \sqrt{a^2 \cos 2\varphi + \left(-\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right)^2} d\varphi = 4a^2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = 4a^2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$