

Пети домаћи задатак - Математика 2

- Одредити површину површи омеђене кривама $y = \ln x$ и $y = \ln^2 x$.
- Одредити вредност израза $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x+2)^2(x^2+1)}$.
- Одредити вредност израза $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx$.
- Одредити вредност израза $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$.
- Одредити површину површи омеђене кривама $y = 1 - \cos t$, $x = t + \sin t$ где је $t \in (0, 2\pi)$ и x -осом.
- Користећи уопштене поларне координате $x = ar \cos \varphi$, $y = br \sin \varphi$ одредити површину елипсе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- Одредити површину површи омеђене параболом $y = x(x-1)$ и нормалом на параболу у тачки $(1, 0)$.
- Одредити дужину лука спирале $r = \varphi$.
- Одредити дужину лука параболе $y = x^2$ од тачке $(-a, a^2)$ до (a, a^2) тачке, где је $a > 0$.
- Одредити запремину тела које настаје ротацијом око x -осе криве $y = x(1-x)$ на интервалу $(0, 1)$.
- Одредити запремину тела које настаје ротацијом око y -осе криве $y = \sin x$ где је $x \in (0, \pi)$.
- Одредити вредност израза $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{|(x-1)(x-2)|}}$.
- Одредити вредност израза $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} \, dx$.
- Нека је $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$. Одредити D_z и наћи све парцијалне изводе реда 1 и 2.

15. Нека је $u = (x + y + z)^2 + (x - y + z)^2 + (x + y - z)^2$. Одредити ранг матрице:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

16. Нека је $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ и $f(r) = r^\alpha$ где је $\alpha \in \mathbb{R}$. Одредити $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

17. Нека је $f(x, y) = F(ax + by, \sqrt{x^2 + y^2})$. Одредити $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

18. Нека је $z = \varphi(u) + \psi(v)$ где је $u = x + ay$ и $v = x - ay$. Показати да важи $\frac{\partial z}{\partial y} = a(\varphi' - \psi')$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (\varphi' + \psi'), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

19. Нека је $u = f(x + y) + yg(x + y)$. Одредити $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

20. Нека је дата површ $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$. Доказати да је збир квадрата одсечака на координантним осама тангентне равни константан.

Јелена Томановић

Рада Мутаџић

проф. др Александар Цветковић

проф. др Слободан Радојевић