Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

19.05.2015. године

Rešenje šestog domaćeg zadatka iz Matematike 2

1. Ako upotrebimo polarne koordinate jednačinu krive možemo napsiati na sledeći način

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) \ \Rightarrow \ r^2 = a^2\cos(2\varphi).$$

Zbog pozitivnosti ostalih članova u jednačini zaključujemo da su moguće vrednosti ugla zadate intervalima $[-\pi/4, \pi]$ i $[3\pi/4, 5\pi/4]$. Kako je grafik relacije simetričan u odnosu na y osu, jer jednačina ostaje nepreomenjena posle smene $y := -y$, zaključujemo da je dovoljno posmatrati samo interval $[-\pi/4, \pi/4]$. Kako je grafik relacije simetričan u odnosu na x osu zaključujemo da je dovoljno pomastrati samo prvi kvadrant $[0, \pi/4]$.

Koristeći formulu za površinu obrtne površi nalazimo

$$P = 2\pi\int_0^{\pi/4} r\sin\varphi\sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi = 2\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\cos^{1/2}(2\varphi)\sqrt{\cos(2\varphi)+\frac{\sin^2(2\varphi)}{\cos(2\varphi)}}d\varphi$$
$$= 2\pi a^2\int\sin\varphi d\varphi = 2\pi a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

2. Zapremina je odredjena sa

$$V = \pi\int_1^{+\infty} y^2dx = \pi\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dx}{x^2} = \pi.$$

Površina površi je

$$P = 4\pi\int_1^{+\infty} y\sqrt{1+(y')^2}dx = 4\pi\lim_{A\to+\infty}\int_0^A x^{-3}(1+x^4)^{1/2}dx$$
$$= 2\pi\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A^2} x^{-2}(1+x^2)^{1/2}dx = -2\pi\lim_{A\to+\infty}\int_1^{A^{-2}} x^{-1}\sqrt{1+x^2}dx,$$

gde smo uveli smenu $x := x^2$, koja se nameće, pa zatim $x := 1/x$.

Uvodjenjem hiperboličke smene $x = \operatorname{sh} t$, dobijamo

$$P = -\pi\lim_{A\to+\infty}\int_\alpha^{\operatorname{arsh} A^{-2}}\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh} t}dt = -\pi\lim_{A\to+\infty}\int_\alpha^{\operatorname{arsh} A^{-2}}\frac{\operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t - 1}d(\operatorname{ch} t)$$
$$= -\pi\lim_{A\to+\infty}\left(\operatorname{ch}\ \operatorname{arsh} A^{-2} - \operatorname{ch}\alpha + \frac{1}{2}\log\frac{1-\operatorname{ch}\ \operatorname{arsh} A^{-2}}{1+\operatorname{ch}\ \operatorname{arsh} A^{-2}} - \frac{1}{2}\log\frac{1-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right) = +\infty,$$

gde smo označili $\alpha = \operatorname{arsh} 1$.

3. Korišćenjem parcijalne integracije nalazimo

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n}\Big|_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}dx \\ &= 2^{-n} + 2n(I_n - I_{n+1}). \end{aligned}$$

Odavde dobijamo rekurentnu relaciju

$$I_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}n} + \frac{2n-1}{2n}I_n, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Sada jednostavno nalazimo

$$I_4 = \frac{11}{48} + \frac{5\pi}{64}.$$

4. Dobijamo

$$\begin{aligned} \int &= \lim_{\substack{A_1\to+\infty \\ A_2\to+\infty}} \int_{-A_1}^{A_2} |x|e^{-x^2} = \lim_{\substack{A_1\to+\infty \\ A_2\to+\infty}} \left(\int_0^{A_2} xe^{-x^2}dx + \int_{-A_1}^{0}(-x)e^{-x^2}dx\right) \\ &= \lim_{A_2\to+\infty}\int_0^{A_2} xe^{-x^2}dx - \lim_{A_1\to+\infty}\int_{A_1}^{0} xe^{-x^2}dx = \lim_{A_1\to+\infty}\int_0^{A_1} e^{-x^2}d(x^2) = 1. \end{aligned}$$

5. Koristeći Newtonov zakon gravitacije znamo da je rad

$$\int_R^{R+h} \gamma\frac{mM}{r^2}dr = \gamma mM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right),$$

gde je M masa zemlje, m masa tela, R poluprečnik zemlje i visina na koju se podiže telo. γ je Newtonova gravitaciona konstanta.

Ako $h\to+\infty$ rad je $\gamma mM/R$.

6. Potrebno je naći tačku u kojoj je gradijent površi paralelan vektoru normale na ravan. Dakle treba rešiti sistem jednačina

$$(4x, 2y, 2z) = \nabla(2x^2 + y^2 + z^2 - 4) = \lambda(4, 2, 2).$$

Dobijamo $x = y = z = \lambda$. Kako tačka mora biti na površi mora važiti

$$2\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 = 4,$$

odakle dobijamo

$$\lambda = \pm 1.$$

Dakle, možemo recimo uzeti $x = y = z = 1$.

Tangentna ravan je onda

$$4(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0 \;\Rightarrow\; 2x+y+z=4.$$

Da bismo odredili normalnu projekciju z-ose, odredimo prvo

$$n_1 = k \times (2,1,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,2,0).$$

Vektor n_1 je paralelan tangentnoj ravni i normalan je na vektor k, vektor pravca z-ose, što znači da je vektor $n_1 \times (2,1,1)$ vektor normalne projekcije z-ose na ravan. Dobijamo

$$n_2 = n_1 \times (2,1,1) = (2,1,-5).$$

Kako je tačka $(0,0,4)$ tačka prodora z-ose u tangentnu ravan to je normalna projekcija z-ose u tangentnu ravan data sa

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-5}.$$

7. Gradijent površi iznosi

$$\nabla(x^2+y^2+1-z) = (2x,2y,-1).$$

Tangentne ravni su odredjene sa

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1(z-2)=0,\\
\sqrt{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1(z-2)=0,\\
-\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\sqrt{2}\left(y-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-1(z-2)=0.
\end{aligned}$$

Presečna tačka ovih ravni je rešenje sistema jednačina. Rešenje sistema je $(0,0,0)$.

Rastojanje tačke $(0,0,0)$ od svake tačke površi iznosi

$$d = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}.$$

Potrebno je naći tačku na površi za koju je rastojanje minimalno. Kako tačka na površi zadovoljava jednačinu $z = x^2+y^2+1$, to je potrebno naći minimum funkcije

$$\sqrt{x^2+y^2+(x^2+y^2+1)^2}.$$

Medjutim, kako je koren rastuća funkcija problem odredjivanja minimuma ove funkcije je ekvivalentan problemu odredjivanja minimuma funkcije

$$x^2+y^2+(x^2+y^2+1)^2.$$

Ovde trivijalno vidimo da je najmanja vrednost funkcije u tački $(0,0)$ jer je zbog poztivnosti uvek ispunjen uslov

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2 + 1)^2 \geq 1.$$

Dakle, tačka na površi koja je na najmanjem rastojanju od tačke $(0,0,0)$ je tačka $(0,0,1)$.

8. Treba rešiti sistem jednačina

$$\nabla f = -e^{-x-y}(3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x, 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 4y, -2z) = 0.$$

Iz treće jednačine nalazimo $z = 0$. Ostaje nam sistem

$$3x^2 + 2y^2 - 6x = 0, \quad 3x^2 + 2y^2 - 4y = 0.$$

Oduzimanjem jednačina nalazimo $3x = 2y$, čijim korišćenjem nalazimo rešenja $(0,0)$ i $(4/5, 6/5)$. Dakle potencijalni ekstremi se nalaze u tačkama $(0,0,0)$ i $(4/5, 6/5, 0)$.

Hessian je

$$H = e^{-x-y} \begin{bmatrix} 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 12x + 6 & 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x - 4y & -2z \\ 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 6x - 4y & 3x^2 + 2y^2 + z^2 - 8y + 4 & -2z \\ -2z & -2z & 2 \end{bmatrix}.$$

U tačkama od interesa vrednosti Hessiana su

$$H(0,0,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad H\left(\frac{4}{5}, \frac{6}{5}, 0\right) = \frac{1}{5}e^{-2} \begin{bmatrix} 6 & -24 & 0 \\ -24 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

U tački $(0,0,0)$ Hessian je pozitivno definitan pa je to tačka minimuma funkcije.

U tački $(4/5, 6/5, 0)$ Hessian nije definitan jer je $\Delta_1 = 6$, $\Delta_2 = -600$, pa funkcija nema ekstremum.

9. Kako je problem osno simetričan, možemo pretpostaviti da se greda nalazi postavljena sa dve stranice normalne na xy ravan kako je prikazano na slici 1. Nama je potrebna greda maksimalne zapremine. Sa slike vidimo da je zapremina grede

$$V = (2x)^2 y = 4x^2 y.$$

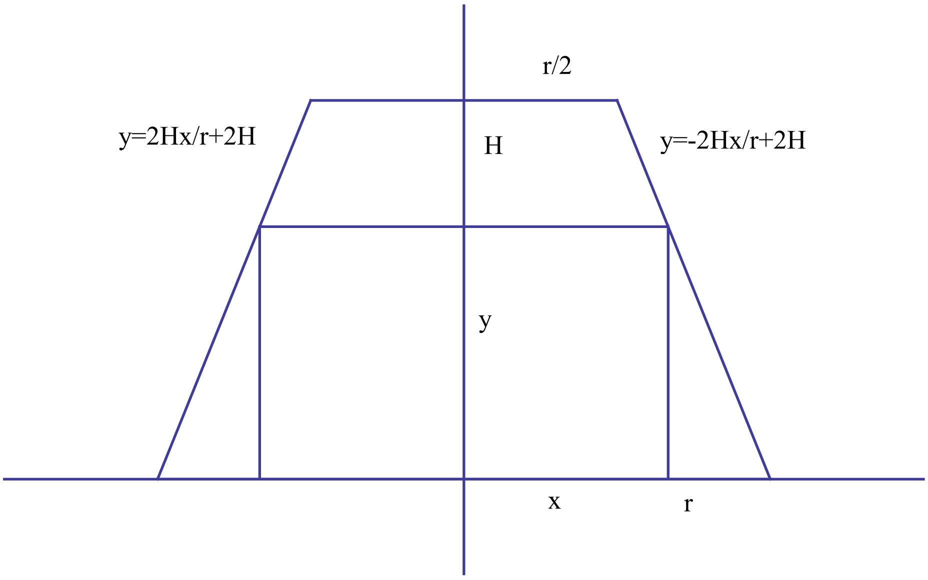
Odavde nalazimo

$$\nabla V = (8xy, 4x^2) = 0.$$

Rešenja su tačke $(0, y)$. Medjutim, u svim ovim tačkama je $V = 0$. Kako je naša funkcija pozitivna to je ovo očigledno minimum zapremine debla.

Kako maksimum nije unutar oblasti mora biti na granici. Posmtrajmo prvo gornju granicu (x, H), $x \in [-r/2, r/2]$. Ovde je

$$V = 4x^2 H.$$



Slika 1: Projekcija na xy ravan problema isecanja grede iz debla.

Ovo je funkcija jedne promenljive očigledno rastuća sa porastom $|x|$. Maksimum se postiže u tački $x = \pm r/2$ i iznosi

$$V = r^2 H.$$

Posmatrajmo sada granicu $y = -2Hx/r + 2H$, $x \in [r/2, r]$. Ovde je

$$V = 4x^2 \left(\frac{-2H}{r} x + 2H \right).$$

Nalazimo

$$V' = 8x \left(\frac{-2H}{r} x + 2H \right) - \frac{8H}{r} x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \;\vee\; x = \frac{2r}{3}.$$

U ovoj tački je $y = -2H/r(2r/3) + 2H = 2H/3$. Kako je $V''(2r/3, 2H/3) = -16H/3 < 0$. Zaključujemo da je u ovoj tački zapremina debla maksimalna i iznosi

$$V = 4 \frac{4r^2}{9} \frac{2H}{3} = \frac{32}{27} r^2 H.$$

Primetimo da zbog simetrije problema isto rešenje i na granici $y = 2Hx/r + 2H$. Kako je ova vrednost maksimalna na granici $y = -2Hx/r + 2H$, zaključujemo da je maksimalna i u celoj oblasti.

Dakle, maksimalna vrednost zapremine iznosi

$$V = \frac{32}{27} r^2 H.$$

10. Oblast definisanosti je $D_f = [-1, \quad 1] \times [-1, \quad 1]$. Nađimo prve parcijalne izvode i izjednačimo

ih sa 0:

$$\begin{aligned}
\nabla f &= \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}, \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-2y}{2\sqrt{1-y^2}}\right) \\
&= \left(x \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right), y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Primetimo da ovi izrazi važe u svim tačkama oblasti definisanosti izuzev tačke $(0,0)$, kao i ivica $(\pm 1, y)$, $y \in [-1,1]$ i $(x, \pm 1)$, $x \in [-1,1]$. Primetimo da skup tačaka $(\pm 1, y)$, $y \in [-1,1]$ i $(x, \pm 1)$, $x \in [-1,1]$ predstavlja ivice oblasti definisanosti, dakle stranice kvadrata $[-1,1] \times [-1,1]$.

Rešenja sistema $\nabla f = 0$ je

$$(x = 0 \vee \sqrt{1-x^2} = \sqrt{x^2+y^2}) \wedge (y = 0 \vee \sqrt{1-y^2} = \sqrt{x^2+y^2}).$$

Kako x i y ne mogu istovremeno biti jednaki nuli, za $x = 0$ dobijamo

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

dakle tačke $(0, \pm 1/\sqrt{2})$ i $(0, -1/\sqrt{2})$. Za $y = 0$ dobijamo $x = \pm 1/\sqrt{2}$, dakle tačke $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$.

Pod uslovom $x \neq 0$ i $y \neq 0$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \;&\Rightarrow\; 2x^2 + y^2 = 1, \\
\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \;&\Rightarrow\; x^2 + 2y^2 = 1.
\end{aligned}$$

Odavde dobijamo rešenja $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ i $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$.

Hessian iznosi

$$H = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{bmatrix}.$$

U tačkama $(0, \pm 1/\sqrt{2})$, Hessian iznosi

$$H(0, \pm 1/\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $\Delta_1 = \sqrt{2} - 1 > 0$ i $\Delta_2 = -2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) < 0$ pa u ovim tačkama nema ekstrema.

U tačkama $(\pm 1/\sqrt{2}, 0)$, Hessian iznosi

$$H(\pm\sqrt{2}, 0) = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - 1 \end{bmatrix}.$$

Slično kao u prethodnom dobijamo da Hessian nema ekstremum.

Matrica Hessiana u tačkama $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ i $(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ iznosi

$$H(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = H(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}.$$

Odavde nalazimo $\Delta_1 = -\sqrt{3/2} < 0$ i $\Delta_2 = 3\sqrt{3}/(4\sqrt{2}) > 0$. Sledi da je Hessian pozitivno definitan pa u ovoim tačkama imamo maksimume. Vrednost funkcije f iznosi

$$f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = \sqrt{6}.$$

U tačkama $(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ i $(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ vrednost matrice Hessiana iznosi

$$H(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = H(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}.$$

Odavde nalazimo $\Delta_1 = -\sqrt{3/2} < 0$ i $\Delta_2 = 3\sqrt{3}/(4\sqrt{2})$. Zaključujemo da je matrica Hessiana negativno definitna pa u ovim tačkama funkcija ima maksimum. Vrednost maksimuma iznosi

$$f(-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f(1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}) = \sqrt{6}.$$

Zaključujemo da funkcija nema minimuma u oblasti $(-1, 1) \times (-1, 1) \setminus (0, 0)$. Posledica ovog zaključka je da se minimum funkcije nalazi na ivici oblasti definisanosti $(\pm 1, y)$, $y \in [-1, 1]$, $(x, \pm 1)$, $x \in [-1, 1]$ ili u tački $(0, 0)$.

U tački $(0, 0)$ vrednost funkcije je

$$f(0, 0) = 2.$$

Posmtrajmo tačke $(x, \pm 1)$, $x \in [-1, 1]$. U ovim tačkama funkcija je

$$f = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Ovo je funkcija jedne promenljive. Jednostavno nalazimo stacionarnu tačku

$$f' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Primetimo da izraz za izvod ne važi u krajnjim tačkama ± 1. Ove tačke moramo razmatrati posebno. U tački $x = 0$, zbog $f''(0, \pm 1) = -2$, funkcija ima maksimum. Vrednost maksimuma je

$$f(0, \pm 1) = 2.$$

Kako minimum ne pripada skupu $x \in (-1, 1)$ $y = \pm 1$, to se vrednost minimuma nalazi u krajnjim tačkama $(\pm 1, \pm 1)$ i iznosi

$$f(\pm 1, \pm 1) = \sqrt{2}.$$

Analiza slučaja $(\pm 1, y)$, $y \in [-1, 1]$ je ista kao prethodna jer je $f(x, y) = f(y, x)$.

Zaključujemo da je minimalna vrednost funkcije u tačkama $(\pm 1, \pm 1)$ i iznosi $\sqrt{2}$, dok je maksimalna vrednost funkcije u tačkama $(\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3})$ i iznosi $\sqrt{6}$.

11. Nalazimo

$$\nabla f = (-6x + 4y, -12y + 4x + 6z - 6, 6y - 4z + 4) = (0, 0, 0).$$

Rešenje sistema linearnih jednačina je $(0, 0, 1)$.

Hessian u tački $(0, 0, 1)$ je

$$H = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 4 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix}.$$

Nalazimo

$$\Delta_1 = |-6| = -6 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 4 & -12 \end{vmatrix} = 56 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -6 & 4 & 0 \\ 4 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Zaključujemo da u tački $(0, 0, 1)$ funkcija ima maksimum.

12. Potražimo parcijalni izvod po x i y jednačine kojom je zadata funkcija. Nalazimo

$$\begin{aligned} 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - 2z = 0 \ &\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2z}{3z^2 - 2x}, \\ 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} - 2x \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0 \ &\Rightarrow\ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{3z^2 - 2x}. \end{aligned}$$

Odavde nalazimo

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 1) = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 1) = -1.$$

Druge izvode funkcije z nalazimo koristeći prve izvode. Imamo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \frac{\frac{\partial z}{\partial x}(3z^2 - 2x) - z\left(6z\frac{\partial z}{\partial x} - 2\right)}{(3z^2 - 2x)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{6z\frac{\partial z}{\partial x} - 2}{(3z^2 - 2x)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6z\frac{\partial z}{\partial y}}{(3z^2 - 2x)^2}.$$

U tački $(1, 1)$ nalazimo

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 1) = -16, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6.$$

Taylorov polinom je

$$1 + 2(x - 1) + (-1)(y - 1) + \frac{1}{2}(-16(x - 1)^2 + 2 \cdot 10(x - 1)(y - 1) - 6(y - 1)^2).$$

Jelena Tomanović

Rada Mutavdžić

prof. dr Aleksandar Cvetković

prof. dr Slobodan Radojević