Нумерика - уводно предавање

1) *Апсолутна и релативна грешка*

Приликом израчунавања одређене бројевне вредности x, неретко нисмо у прилици да је нађемо са потпуном тачношћу, већ смо принуђени да је апроксимирамо одговарајућом приближном вредношћу $\overline{x}$ (нпр. већ кад користимо неки мерни инструмент, јавља нам се таква ситуација с обзиром на то да овај никад није апсолутно прецизан).

Дефиниција 1. Апсолутна вредност разлике $\Delta_x = |x - \overline{x}|$ се тада назива **апсолутна грешка**, док се количник $\delta_x = \frac{\Delta_x}{x} = \frac{|x-\overline{x}|}{x}$ назива **релативна грешка** апроксимације вредности x вредношћу $\overline{x}$.

Релативну грешку обично процењујемо као

$$\delta_x \approx \frac{\Delta_x}{\overline{x}} = \delta_{\overline{x}}$$

јер нам је податак x углавном недоступан.

Информација о апсолутној грешки нам омогућава да одредимо интервал $[\overline{x} - \Delta_x, \overline{x} + \Delta_x]$ којем припада вредност x. Са практичног становишта, релативна грешка нам пружа реалнију информацију о могућем одступању које чинимо одговарајућом апроксимацијом јер нам даје информацију о величини могуће апсолутне грешке **у односу на** вредност коју рачунамо. Податак о могућој апсолутној грешки нам сам за себе не говори много (зато се нпр. свака опрема за мерење продаје са спецификацијом горње границе дозвољене релативне грешке за дати опсег мерења). Обично се изражава у процентима.

Пример 1. Уколико кажемо да вредност $\overline{x} = 1.2345$ апроксимира вредност x са горњом границом релативне грешке од 5%, имамо

$$\frac{|x-\overline{x}|}{\overline{x}} \leq 0.05,\ |x-\overline{x}| \leq 0.05\overline{x},\ -0.05\overline{x} \leq x - \overline{x} \leq 0.05\overline{x},\ 0.95\overline{x} \leq x \leq 1.05\overline{x},$$
$$1.1728 \leq x \leq 1.2962,$$

док уколико кажемо да вредност $\overline{x} = 1.2345$ апроксимира вредност x са горњом границом релативне грешке од 0.5%, имамо

$$\frac{|x-\overline{x}|}{\overline{x}} \leq 0.005,\ |x-\overline{x}| \leq 0.005\overline{x},\ -0.005\overline{x} \leq x - \overline{x} \leq 0.005\overline{x},\ 0.995\overline{x} \leq x \leq 1.005\overline{x},$$
$$1.2283 \leq x \leq 1.2407.$$

2) *Записивање нумеричких података*

С обзиром на то да нумерички подаци могу имати различит ред величине (0.0000001, 100000 и сл.), устаљен је тзв. начин записивања *у покретном зарезу уз помоћ мантисе и експонента*, односно сваки податак x записујемо у облику

$$x = (x)^* \cdot 10^e,$$

где **експонент** e бирамо тако да буде $(x)^* \in [0.1, 1)$. Део $(x)^*$ се тада назива **мантиса**.

Нпр. нормализовани запис броја 1.2345 биће $0.12345 \cdot 10^1$, што се још може записати и као $.12345 \cdot 10^1$ или једноставно $12345e1$ (како је у мантиси прва цифра након децималне тачке по default-у различита од 0 - није неопходно да иста садржи ни децималну тачку ни нулу пре децималне тачке, управо то и јесте поента записа у покретном зарезу - користити што мање "меморије"). Planck-ова и Avogadr-ова константа, које су у SI систему записују као $h = 6.626068 \cdot 10^{-34} Js$ и $L = 6.02214129 \cdot 10^{23} mol^{-1}$ се могу записати као $6626068e - 33Js$, односно $602214129e24mol^{-1}$.

3) *Значајне цифре*

Вратимо се на тренутак Примеру 1. Видимо да би услов да је горње ограничење за релатвну грешку једнако 5% могао да нам пружи само информацију о цифри са највећом тежином у вредности x (јер $1.1728 \leq x \leq 1.2962$ подразумева да је та цифра једнака 1, али не можемо да знамо да ли је прва цифра након децималне запете једнака 1 или 2), док би услов да је горње ограничење за релативну грешку једнако .5% могао да нам пружи сигурну информацију и о оној следећој цифри по тежини (из $1.2283 \leq x \leq 1.2407$ знамо да је та цифра једнака 2, док за ону следећу не знамо да ли је једнака 2, 3 или 4).

На основу изложеног можемо рећи да уколико неку вредност x апроксимирамо вредношћу $\overline{x} = 1.2345$ са горњим ограничењем од .5% за релативну грешку, цифре 1 и 2 представљају неку врсту сигурних цифара у податку $\overline{x}$ (док би се у случају горњег ограничења од 5% за релативну грешку само цифра 1 могла сматрати сигурном/значајном).

Термин значајне цифре се формализује кроз следећу дефиницију.

Дефиниција 2. Значајне цифре неког броја су све цифре његовог децималног записа полазећи од прве "не-нула" цифре са леве стране. Другим речима, уколико је нека децимална вредност x записана у облику

$$x = \overline{c_{n-1}c_{n-2}\dots c_1c_0.c_{-1}c_{-2}\dots c_{-m}} = c_{n-1}\cdot 10^{n-1} + c_{n-2}\cdot 10^{n-2} + \dots + c_1 \cdot 10 + c_0$$
$$+ c_{-1}\cdot 10^{-1} + c_{-2}\cdot 10^{-2} + \dots + c_{-m}\cdot 10^{-m},\ c_{n-1} \neq 0,$$

све цифре $c_{n-1},\ c_{n-2},\ \dots,\ c_1,\ c_0,\ c_{-1},\ c_{-2},\ \dots\ c_{-m}$ представљају значајне цифре броја x. Специјално, уколико је нумерички податак x записан у нормализованом облику (преко мантисе и експонента), значајне су све цифре које садржи мантиса - цифру 0 пре децималне тачке не рачунамо (податак о експоненту нам је, наравно, са̂м за себе битан јер нам даје информацију о реду величине одговарајућег нумеричког податка).

Дефиниција 3. Нека је $x' = (x')*10^e$, $x' \in [.1, 1)$, број задат са горњом границом апсолутне грешке Δ. Тада кажемо да број x' садржи k **значајних цифара** (у ширем смислу), где је k највећи природан број за који важи

$$\Delta < 10^{e-k}.$$

Притом под поменутих k цифара подразумевамо првих k цифара слева почев од прве ненула цифре.

Како је из описаног јасно да ова неједнакост не важи ако уместо k ставимо $k+1$, можемо рећи да је k природан број за који важи (у овом случају је атрибут "највећи" непотребан)

$$10^{e-(k+1)} \leq \Delta < 10^{e-k},\ \text{односно}\ 10^{e-k-1} \leq \Delta < 10^{e-k}.$$

Такође, кажемо да број x' садржи l **значајних цифара у ужем смислу**, где је l највећи природан број за који важи

$$\Delta < \frac{1}{2}\cdot 10^{e-l}$$

(или једноставно природан број за који важи $\frac{1}{2} \cdot 10^{e-(l+1)} \leq \Delta < \frac{1}{2} \cdot 10^{e-l}$; опет, под поменутих l цифара подразумевамо првих l слева почев од прве ненула цифре).

Још једном да напоменемо, код нормализованог записа цифру 0 пре децималне тачке у мантиси (ако је уопште наведена) **не рачунамо** ни у значајне ни у значајне цифре у ужем смислу (као што је не рачунамо ни у било ком другом запису ако пре ње нема "не-нула" цифара).

Из приложеног је јасно да је свака значајна цифра у ужем смислу уједно и значајна цифра у ширем смислу, као и да је свака значајна цифра у ширем смислу уједно и значајна цифра.

У случају који смо разматрали имамо $\overline{x} = .12345 \cdot 10^1$, при чему у уколико горње ограничење за релативну грешку износи .5% - имамо да је горње ограничење за апсолутну грешку $\Delta = 0.005 \cdot \overline{x} = .0062 = 0.62 \cdot 10^{-2}$. Како је ($e = 1$)

$$10^{-3} \leq 0.62 \cdot 10^{-2} < 10^{-2},$$

односно

$$10^{1-4} \leq .0062 < 10^{1-3},$$

то је у складу са формулацијом дефиниције значајних цифара $k = 3$, те се прве 3 цифре ($1, 2$ и 3) у броју $\overline{x}$ сматрају значајним. Слично, како је

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \leq .0062 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-1},$$

односно

$$\frac{1}{2} \cdot 10^{1-3} \leq .0062 < \frac{1}{2} \cdot 10^{1-2},$$

то је у складу са формулацијом дефиниције значајних цифара $l = 2$, те се прве 2 цифре (1 и 2) у броју $\overline{x}$ сматрају значајним у ужем смислу (што је потпуно у складу са пређашњом дискусијом интервала $[\overline{x}-\Delta_x, \overline{x}+\Delta_x]$). Да је број $\overline{x}$ задат без додатних информација о горњој граници апсолутне грешке, значајним цифрама би се сматрале све његове цифре - 1, 2, 3, 4, 5, при чему би подразумевано ограничење за горњу границу апсолутне грешке износило $0.5 \cdot 10^{-5}$.

Пример 2. Уколико је податак $\overline{x} = 0.03120700$ задат са гоњом границом за дозвољену апсолутну грешку $\Delta_{\overline{x}} = 0.5 \cdot 10^{-5}$, одредити значајне цифре у ширем и ужем смислу у $\overline{x}$. Одредити и значајне цифре у броју $\overline{x}$ и горње ограничење за дозвољену апсолутну грешку уколико је он задат без додатних напомена о истом.

Решење. Уколико би дати број $\overline{x}$ био задат без без информације о апсолутној грешки, значајним цифрама би се смтрале 3, 1, 2, 0, 7, 0, 0 (рачунају се и нуле) и горњом границом апсолутне грешке би се сматрала $0.5 \cdot 10^{-8}$ Како је $e = -1$ ($0.03120700 = 0.3120700 \cdot 10^{-1}$) и

$$10^{-6} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} < 10^{-5},$$

за број k значајних цифара треба да важи $-1 - k = -5$ односно $k = 4$. Дакле, значајне цифре су 3, 1, 2, 0. Како не важи

$$0.5 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-5},$$

(важи знак једнакости, али не важи знак "$<$" који се формално захтева у дефиницији), то нема 4 већ 3 значајне цифре у ужем смислу (јасно је да важи $0.5 \cdot 10^{-5} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-4}$, односно $0.5 \cdot 10^{-1-(3+1)} \leq 0.5 \cdot 10^{-5} < 0.5 \cdot 10^{-1-3}$, тј. $l = 3$). Дакле, значајне цифре у ужем смислу су 3, 1, 2. Да је нпр. гоња граница за дозвољену апсолутну грешку била $\Delta_{\overline{x}} = 0.49 \cdot 10^{-5}$, имали бисмо једнак број значајних цифара у ширем и ужем смислу (по 4).

Интервал $[\overline{x} - \Delta_x, \overline{x} + \Delta_x]$ је $[0.03120200, 0.03121200]$, дакле опет се само значајне цифре у ужем смислу испостављају заиста поузданим.

Пример 3. Заокружити број $\overline{x} = 72.353$, задат са горњом границом дозвољене апсолутне грешке $\Delta_x = 0.026$, тако да у добијеној вредности све цифре буду значајне у ужем смислу.

Решење: Уколико тражену вредност означимо са $\overline{x}'$, њоме у старту правимо још додатну грешку од $|\overline{x}' - \overline{x}|$ јер ми, уствари, преко $\overline{x}'$ долазимо до $\overline{x}$, а онда преко $\overline{x}$ до x.

Заокруживање заиста јесте неопходно јер у $\overline{x} = 72.353 = .72353 \cdot 10^2$ имамо 3 цифре значајне у ужем смислу (7, 2 и 3) с обзиром на то да је $.026 = .26 \cdot 10^{-1} < .5 \cdot 10^{-1} = .5 \cdot 10^{2-3}$ (и $.26 \geq .5 \cdot 10^{2-4}$). Како цифре 5 и 3 (последње две) у старту нису значајне у ужем смислу, неће бити ни након новог заокруживања, што значи да их одмах можемо одбацити .

Уколико заокружимо $\overline{x}' = 72.4 = .724 \cdot 10^2$ ($\overline{x}'$ се овако правилно заокружује на 3 цифре, дозвољена граница грешке се пење до

$$\Delta_{\overline{x}'} = |\overline{x}' - \overline{x}| + \Delta_x = .047 + .026 = .073,$$

што цифру 4 у $\overline{x}'$ ($k = 3$) исто не чини значајном у ужем смислу с обзиром на то да није $.073 < .5 \cdot 10^{2-3} = .05$.

Уколико заокружимо $\overline{x}' = 72. = .72 \cdot 10^2$, дозвољена граница грешке се пење до

$$\Delta_{\overline{x}'} = |\overline{x}' - \overline{x}| + \Delta_x = .353 + .026 = .379,$$

што цифру 2 у $\overline{x}'$ ($k = 2$) чини значајном у ужем смислу (а самим тим и цифру 7) с обзиром на то да је $.379 < .5 \cdot 10^{2-2} = .5$.

Пример 4. Одредити са колико значајних цифара у ширем и ужем смислу број $\overline{x} = .2518$ апроксимира $x = .2522$.

Решење: Имамо $\Delta = .0004 = .4 \cdot 10^{-3} < 10^{0-3}$ ($\overline{x} = .2518 \cdot 10^0$, $k = 0$) и $\Delta > 10^{0-4}$, одакле закључујемо да $\overline{x}$ садржи 3 значајне цифре у ширем смислу. Одмах видимо да има и исто толико цифара значаних у ужем смислу јер је

$$.5 \cdot 10^{0-4} < .4 \cdot 10^{-3} < .5 \cdot 10^{0-3}.$$

Подаци x и $\overline{x}$ се поклапају на 2 значајне цифре.

Посматрајмо сада ситуацију у којој број $\overline{x} = .2998$ апроксимира $x = .3002$. На основу решења претходног задатка јасно је да је и у овом случају број значајних цифара и уширем и у ужем смислу у броју $\overline{x}$ као апроксимацији броја x једнак 3, али x и $\overline{x}$ се не поклапају ни у једној значајној цифри!

Пример 5. Величину $x = .123456$ на 5 значајних цифара можемо заокружити као $\overline{x} = .12345$ или $\overline{x}' = .12346$ - што је по правилу заокруживања. У првом случају је $\Delta = .000006 = .6 \cdot 10^{-5}$, одакле на основу $10^{0-6} < .6 \cdot 10^{-5} < 10^{0-5}$ ($e = 0$) закључујемо да $\overline{x}$ садржи 5 значајних цифара у ширем смислу (то су 1, 2, 3, 4, 5). Слично, у другом случају је $\Delta = .000004 = .4 \cdot 10^{-5}$, и опет на основу $10^{0-6} < .4 \cdot 10^{-5} < 10^{0-5}$ закључујемо да $\overline{x}'$ садржи 5 значајних цифара у ширем смислу. Како, такође, важи $.5 \cdot 10^{0-6} < .4 \cdot 10^{-5} < .5 \cdot 10^{0-5}$, то у другом случају имамо и 5 значајних цифара у ужем смислу, али их зато у првом случају имамо 4 (1, 2, 3, 4) с обзиром на то да је $.5 \cdot 10^{0-5} < .6 \cdot 10^{-5} < .5 \cdot 10^{0-4}$.

Пример 6 (задатак са колоквијума). Одредити значајне цифре у ширем и ужем смислу у броју $\overline{x} = 3.025400$ уколико је познато да је дат са горњом границом апсолутне грешке $\Delta(\overline{x}) = 3{\cdot}10^{-4}$. Заокружити број $\overline{x}$ тако да у добијеној вредности све цифре буду значајне у ужем смислу. Уколико би нам дати број био задат без конкретних информација о апсолутној грешки, одредити подразумевану границу за исту. Све одговоре детаљно образложити.

Решење: У случају да нема конкретних напомена о горњој граници апсолутне грешке, значајне цифре би биле све цифре децималног записа датог броја почев од прве цифре која је различита од 0, дакле 3, 0, 2, 5, 4, 0, 0, док би подразумевано ограничење за апсолутну грешку износило $0.5 \cdot 10^{1-7} = 0.5 \cdot 10^{-6}$ Нормирани запис броја $\overline{x}$ гласи $\overline{x} = 0.3025400 \cdot 10^1$, па је број значајних цифара у ширем смислу највећи природан број k такав да је (видети дефиниције из ханд-оут-а)

$$\Delta(\overline{x}) = 0.3 \cdot 10^{-3} < 10^{1-k},$$

док је број значајних цифара у ужем смислу највећи природан број l такав да је

$$\Delta(\overline{x}) = 0.3 \cdot 10^{-3} < \frac{1}{2} \cdot 10^{1-l}.$$

Лако закључујемо да је $k = 4$, а такође и $l = 4$, тј. да су значајне цифре и у ширем и у ужем смислу 3, 0, 2, 5.

Уколико заокруживањем броја $\overline{x}$ добијемо број $\overline{x}'$, укупна грешка са којом је вредност $\overline{x}'$ дата износиће (видети одговарајући претходни пример са часа који се односио на ову тематику)

$$\Delta(\overline{x}') = \Delta(\overline{x}) + |\overline{x} - \overline{x}'|.$$

Како је $\Delta(\overline{x}') \geq \Delta(\overline{x})$, број $\overline{x}'$ не може имати више значајних цифара него број $\overline{x}$ и стога је $\overline{x}' = 0.3025 \cdot 10^1$ прво заокруживање са којим има смисла покушати. Тада је

$$\Delta(\overline{x}') = 0.3 \cdot 10^{-3} + 0.00004 \cdot 10^1 = 0.3 \cdot 10^{-3} + 0.4 \cdot 10^{-3} = 0.7 \cdot 10^{-3}$$

Како очито не важи $\Delta(\overline{x}') < \dfrac{1}{2} 10^{1-4}$, морамо покушати са $\overline{x}' = 0.302 \cdot 10^1$ (дакле, 3 цифре). Сада је

$$\Delta(\overline{x}') = 0.3 \cdot 10^{-3} + 0.00054 \cdot 10^1 = 0.3 \cdot 10^{-3} + 5.4 \cdot 10^{-3} = 5.7 \cdot 10^{-3} = 0.57 \cdot 10^{-2},$$

што опет није мање од $0.5 \cdot 10^{1-3}$. Заокружујемо на 2 цифре: $\overline{x}' = 0.30 \cdot 10^1$. Сада је

$$\Delta(\overline{x}') = 0.3 \cdot 10^{-3} + 0.00254 \cdot 10^1 = 0.3 \cdot 10^{-3} + 25.4 \cdot 10^{-3} = 25.7 \cdot 10^{-3} = 0.257 \cdot 10^{-1},$$

што овај пут јесте мање од $0.5 \cdot 10^{1-2}$. Дакле, у овом случају и цифра 3 и цифра 0 јесу значајне у ужем смислу.

Постоје две теореме којима се описује веза између броја значајних цифара у податку којим апроксимирамо одговарајућу вредност и релативне грешке те апроксимације (у принципу се ради о исказу истог типа формулисаном на два различита начина). Студентима се препоручује да их проуче и ПРОВЕРЕ какви се резултати добијају када их применимо на примере са предавања.

Теорема 1. (Књига Спалевић - Пранић) Уколико вредност x апроксимирамо вредношћу $\overline{x}$ са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\overline{x}}$, при чему $\overline{x}$ садржи k сигурних цифара, онда важи

$$\frac{1}{(\alpha_1 + 1) \cdot 10^k} \leq \delta_{\overline{x}} < \frac{1}{\alpha_1 \cdot 10^{k-1}},$$

где је α_1 прва значајна цифра у $\overline{x}$. Слично, уколико вредност x апроксимирамо вредношћу $\overline{x}$ са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\overline{x}}$, при чему $\overline{x}$ садржи l значајних цифара у ужем смислу, онда важи

$$\frac{1}{2(\alpha_1+1)\cdot 10^l} \leq \delta_{\overline{x}} < \frac{1}{2\alpha_1 \cdot 10^{l-1}}.$$

Теорема 2. (Књига Цветковић - Спалевић) Уколико вредност x апроксимирамо вредношћу $\overline{x}$ са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\overline{x}}$, при чему $\overline{x}$ садржи k значајних цифара, онда важи

$$k < -\log_{10}\left|(\overline{x})^*\right| - \log_{10}\delta_{\overline{x}},$$

где $(\overline{x})^*$ представља нормализовану мантису броја $\overline{x}$. Слично, уколико вредност x апроксимирамо вредношћу $\overline{x}$ са горњом границом дозвољене релативне грешке $\delta_{\overline{x}}$, при чему $\overline{x}$ садржи l значајних цифара у ужем смислу, онда важи

$$l < -\log_{10}\left|(\overline{x})^*\right| - \log_{10}(2\delta_{\overline{x}}),$$

где $(x')^*$ представља нормализовану мантису броја $\overline{x}$.

Како због $|(x')|^* \in [.1, 1) = [10^{-1}, 10^0)$ важи $\log_{10}\left|(\overline{x})^*\right| \in [-1, 0)$, док је у случајевима који су повољни са практичног аспекта (када је $\delta_{\overline{x}}$ што је могуће мањег реда величине) $\log_{10}\delta_{\overline{x}}$ негативан број по апсолутној вредности пуно већи од 1, имају смисла апроксимације $k \approx -\log_{10}\delta_{\overline{x}}$ и $l \approx -\log_{10}(2\delta_{\overline{x}})$.

4) *Оцена грешке рачунања вредности функције.*

Напомена 1: У примеру 1.11 (књига Спалевић - Пранић, стр. 17), рађеном на часу, је у тексту задатка речено да су дати подаци дати на 3 значајне цифре у ужем смислу, односно $l = 3$. Како је $e = 1$, то за горње границе одговарајућих апсолутних грешака имамо да су строго мање од $\frac{1}{2}10^{1-3} = \frac{1}{2}10^{-2}$.

Напомена 2: ПРОУЧИТИ ПРИМЕР 10 И РАЗМАТРАЊЕ НА СТРАНИ 16. Одатле следи да нпр. за функцију $f(x, y, z) = 5x - 2y - z$ имамо

$$\Delta\overline{f} \leq 5\Delta\overline{x} + 2\Delta\overline{y} + \Delta\overline{z},$$

док нпр. за функцију $g(x, y, z, t) = \dfrac{x^2y^7}{zt^3}$ имамо

$$\delta_{\overline{f}} \leq 2\delta_{\overline{x}} + 7\delta_{\overline{y}} + \delta_{\overline{y}} + 3\delta_{\overline{t}}.$$

Пример 7. (Први колоквијум 2013.) Одредити горње границе за апсолутну и релативну грешку приближне вредности периода осциловања математичког клатна дужине $l = (10.12 \pm 0.03)\ cm$, уколико убрзање Земљине теже износи $g = (9.813 \pm 0.001)\ m/s^2$.

Решење. Прво, хвала Богу, треба ускладити одговарајуће мерне јединице. Имамо $\overline{l} = 0.1012m$, $\Delta(\overline{l}) = 0.0003m$ и $\overline{g} = 9.813m/s^2$, $\Delta(\overline{g}) = 0.001m/s^2$ и $T = T(l, g) = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}} = 2\pi\, l^{1/2}g^{-1/2}$. Дакле,

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \pi\, l^{-1/2}g^{-1/2},\ \frac{\partial T}{\partial g} = -\pi\, l^{-1/2}g^{-3/2}$$

и

$$\overline{T} = T(\bar{l}, \overline{g}) = 0.6381s,\ \frac{\partial T}{\partial l}\left(\bar{l}, \overline{g}\right) = \pi\,\bar{l}^{-1/2}\overline{g}^{-1/2} = 3.1525,\ \frac{\partial T}{\partial l}\left(\bar{l}, \overline{g}\right) = -\pi\,\bar{l}^{-1/2}\overline{g}^{-3/2} = 0.3213,$$

Сада лако налазимо

$$\Delta\overline{T} = \left|\frac{\partial T}{\partial l}\left(\bar{l}, \overline{g}\right)\right|\Delta\bar{l} + \left|\frac{\partial T}{\partial g}\left(\bar{l}, \overline{g}\right)\right|\Delta\overline{g} = 0.0013s$$

и

$$\delta(\overline{T}) = \frac{\Delta\overline{T}}{\overline{T}} = 0.20\%.$$

Задатак је било могуће решити и директно из дефиниције, тј. израчунати баш право $A\left(\overline{T}\right)$ (видети ознаке у секцији 1.4 у књизи Спалевић - Пранић) уместо $\Delta\overline{T}$. Наиме, израз $\sqrt{\frac{l}{g}}$ ће највише одступити од вредности $\sqrt{\frac{\bar{l}}{\overline{g}}}$ у једној од следеће две ситуације:

1) када l буде што је могуће веће од $\bar{l}$ и g буде што је могуће мање од $\overline{g}$, односно

$$T_{max} = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{l} + \Delta\bar{l}}{\overline{g} - \Delta\overline{g}}} = 0.6390s;$$

2) када l буде што је могуће мање од $\bar{l}$ и g буде што је могуће веће од $\overline{g}$

$$T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{l} - \Delta\bar{l}}{\overline{g} + \Delta\overline{g}}} = 0.6371s.$$

Видимо да T_{min} више него T_{max} одступа од $\overline{T}$ и стога добијамо

$$A\left(\overline{T}\right) = \left|\overline{T} - T_{min}\right| = 0.0010s,\ \delta\left(\overline{T}\right) = 0.16\%.$$

А. Пејчев,

Машински факултет у Београду