1.Nacrtati krivu drugog reda:

$$5X^2 - 2XY + 5Y^2 - 2\sqrt{2}X + 4\sqrt{2}Y + \frac{3}{4} = 0$$

Rešenje:

Kako su odgovarajuće determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 24 > 0 \;\text{ i }\; \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 5 & 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

odmah zaključujemo da se radi o elipsi.
Nađimo ugao rotacije koordinatnog sistema O_{XY} koristeći formulu:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \tag{1}$$

gde je:

$$A = 5, 2B = -2 \text{ i } C = 5 \tag{2}$$

jer je opšti oblik krive drugog reda u ravni:

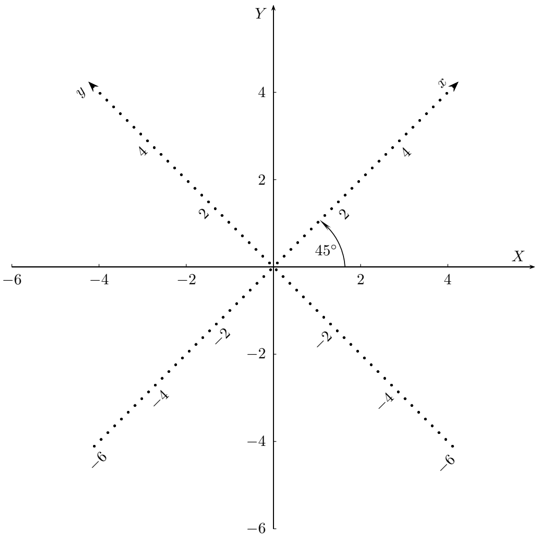
$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

Ako se (2) unese u (1) dobija se 0 u imeniocu za izraz $\operatorname{tg} 2\alpha$, što znači da ugao 2α nije definisan, odnosno $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ ili $2\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Odaberimo npr. ovu drugu varijantu (potpuno je svejedno) Formule prelaska iz koordinatnog sistema O_{XY} u rotirani sistem O_{xy} za ugao α su:

$$\begin{array}{rcrcl} X & = & x\cos\alpha & - & y\sin\alpha \\ Y & = & x\sin\alpha & + & y\cos\alpha \end{array} \tag{3}$$

Ako se vrednost ugla α iz (**??**) unese u (3) dobija se:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} X & = & x\frac{\sqrt{2}}{2} & + & y\frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y & = & -x\frac{\sqrt{2}}{2} & + & y\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} X & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ Y & = & \frac{\sqrt{2}}{2}(y-x) \end{array} \tag{4}$$



Slika 1: Odnos koordinatnog sistema O_{XY} i sistema koji je nastao rotacijom O_{xy}.

Kada se (4) unese u datu krivu drugog reda dobija se:

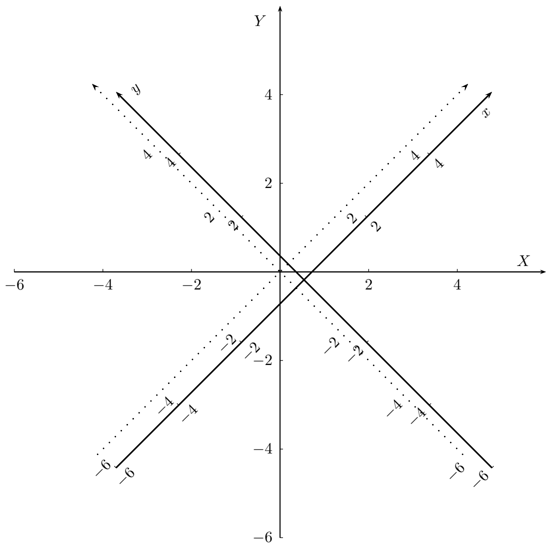
$$
\begin{aligned}
& \frac{5}{2}(x+y)^2 - \left(y^2 - x^2\right) + \frac{5}{2}(y-x)^2 - 2(x+y) + 4(y-x) + \frac{3}{4} = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{5}{2}x^2 \boxed{+5xy} + \frac{5}{2}y^2 - y^2 + x^2 + \frac{5}{2}y^2 \boxed{-5xy} + \frac{5}{2}x^2 - 2x - 2y + 4y - 4x + \frac{3}{4} = 0 \\
\Rightarrow\ & 6x^2 + 4y^2 - 6x + 2y + \frac{3}{4} = 0 \\
\Rightarrow\ & 6\left(x^2 - x\right) + 4\left(y^2 + \frac{1}{2}y\right) + \frac{3}{4} = 0 \\
\Rightarrow\ & 6\left(x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 4\left(y^2 + 2\frac{1}{4}y + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + \frac{3}{4} = 0 \\
\Rightarrow\ & 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{6}{4} + 4\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{4}{16} + \frac{3}{4} = 0 \\
\Rightarrow\ & 6\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(y + \frac{1}{4}\right)^2 = 1
\end{aligned}
$$

Poslednja jednačina pokazuje da je odgovarajuća kriva elipsa, ali je neophodno koordinatni sistem O_{xy} translatorno pomeriti desno duž x-ose za $\frac{1}{2}$ i na dole duž y-ose za $\frac{1}{4}$. Konačno se dobija da je data kriva drugog reda elipsa:

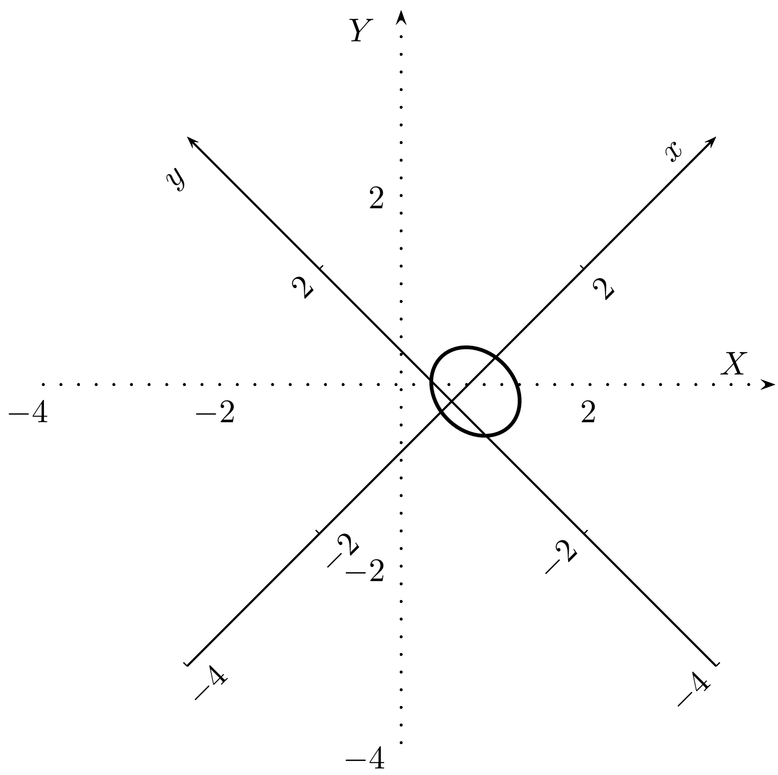
$$
\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} + \frac{\left(y + \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1
$$

Crtež elipse je urađen tako da se može uočiti njena rotacija i translacija u odnosu na početni koordinatni sistem O_{XY}.

Aleksandar Pejčev



Slika 2: Translatorno pomeren koordinatni sistem O_{xy}.



Slika 3: Kriva drugog reda $5X^2 - 2XY + 5Y^2 - 2\sqrt{2}X + 4\sqrt{2}Y + \dfrac{3}{4} = 0$.