

2. Nacrtati krivu drugog reda:

$$28X^2 + 24XY + 21Y^2 + 4X + 3Y - \frac{65687}{148} = 0$$

Rešenje:

Kako su odgovarajuće determinante

$$\delta = \begin{vmatrix} 28 & 12 \\ 12 & 21 \end{vmatrix} > 0 \text{ i } \Delta = \begin{vmatrix} 28 & 12 & 2 \\ 12 & 21 & 1.5 \\ 2 & 2.5 & -\frac{65687}{148} \end{vmatrix} \neq 0,$$

odmah zaključujemo da se radi o elipsi.

Nađimo ugao rotacije koordinatnog sistema O_{XY} koristeći formulu:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C} \quad (1)$$

gde je:

$$A = 28, 2B = 24 \text{ i } C = 21 \quad (2)$$

jer je opšti oblik krive drugog reda u ravni:

$$AX^2 + 2BXY + CY^2 + 2DX + 2EY + F = 0$$

Ako se (2) unese u (1) dobija se:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{24}{28 - 21} = \frac{24}{7}. \quad (3)$$

Možemo uzeti

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{7}{25} \\ \sin 2\alpha &= \frac{\operatorname{tg} 2\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{24}{25} \end{aligned}$$

Dalje,

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{7}{25} = 1 - 2\sin^2 \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \quad (4)$$

Dovoljno je izabrati jedno rešenje, na primer, neka je $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, tada je:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \frac{24}{25} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \quad (5)$$

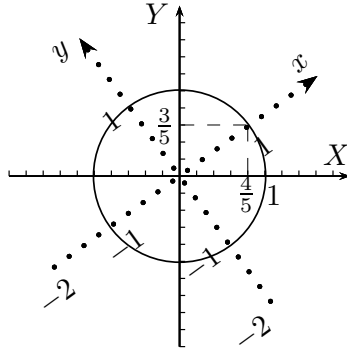
Posmatrajući formule prelaska iz koordinatnog sistema O_{XY} u rotirani sistem O_{xy} za ugao α ,

$$\begin{aligned} X &= x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ Y &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned} \quad (6)$$

u konkretno slučaju se dobija:

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cdot \frac{4}{5} - y \cdot \frac{3}{5} \\ Y &= x \cdot \frac{3}{5} + y \cdot \frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} X &= \frac{1}{5}(4x - 3y) \\ Y &= \frac{1}{5}(3y + 4x) \end{aligned} \quad (7)$$

Na slici 1. pokazan je način koonstruisanja - dobijanja novog koordinatnog sistema. Jednostavno se na jediničnom krugu odrede veličine $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$, čime je i dobijen ugao rotacije. Kada se (7) unese u datu krivu drugog reda dobija se:

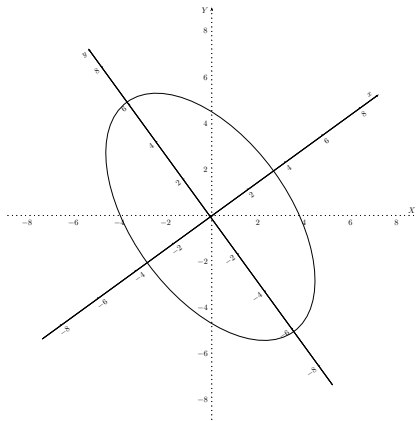


Slika 1: Odnos koordinatnog sistema O_{XY} i sistema koji je nastao rotacijom O_{xy} .

$$\begin{aligned} & \frac{28}{25}(4x - 3y)^2 + \frac{24}{25}(4x - 3y)(3x + 4y) + \frac{21}{25}(3x + 4y)^2 + \\ & + \frac{4}{5}(4x - 3y) + \frac{3}{5}(3x + 4y) - \frac{65687}{148} = 0 \\ \Rightarrow & \frac{x^2}{25}(28 \cdot 16 + 24 \cdot 12 + 21 \cdot 9) + \frac{xy}{25}(-28 \cdot 24 + 24 \cdot 7 + 21 \cdot 24) + \\ & + \frac{y^2}{25}(28 \cdot 9 - 24 \cdot 12 + 21 \cdot 16) + \frac{1}{5}(16x - 12y + 9x + 12y) - \frac{65687}{148} = 0 \\ \Rightarrow & 37x^2 + 12y^2 + 5x - \frac{65687}{148} = 0 \\ \Rightarrow & 37 \left(x + \frac{5}{74} \right)^2 + 12y^2 = \frac{25}{148} + \frac{65687}{148} \\ \Rightarrow & 37 \left(x + \frac{5}{74} \right)^2 + 12y^2 = 444 \\ \Rightarrow & \frac{\left(x + \frac{5}{74} \right)^2}{12} + \frac{y^2}{37} = 1 \end{aligned}$$

Poslednja jednačina pokazuje da je odgovarajuća kriva elipsa, prikazana je na slici 2. Važno je napomenuti da se translatorno pomeranje u levo duž x -ose na slici 2. teško može uočiti.

Aleksandar Pejčev



Slika 2: Kriva drugog reda $28X^2 + 24XY + 21Y^2 + 4X + 3Y - \frac{65687}{148} = 0$