

Други колоквијум из Математике 2

Група 1

1. Наћи први диференцијал функције $u(x, y, z) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
2. Наћи локалне екстремне вредности функције $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{2x+y}$.
3. Наћи решење диференцијалне једначине $(\sin y + x \operatorname{tg} y)y' = 1$ које задовољава услов $y(1) = 0$.
4. Наћи опште решење диференцијалне једначине $2x\sqrt{y^2 - x^2}dx - (1 + 2y\sqrt{y^2 - x^2})dy = 0$.

Решења.

$$1. \quad u'_x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}}} \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} \right) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2 + z^2}} \frac{y^2 + z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$u'_y = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} \right) = \frac{-xy}{\sqrt{y^2 + z^2}(x^2 + y^2 + z^2)},$$

$$u'_z = \frac{-xz}{\sqrt{y^2 + z^2}(x^2 + y^2 + z^2)} \quad (\text{по симетрији}).$$

Први диференцијал је

$$du = \frac{(y^2 + z^2) dx - xy dy - xz dz}{\sqrt{y^2 + z^2}(x^2 + y^2 + z^2)}.$$

2. Парцијални изводи су

$$f'_x = (-2x + 2y^2 - 2x^2)e^{2x+y}, \quad f'_y = (2y + y^2 - x^2)e^{2x+y},$$

$$f''_{xx} = -2(2x^2 - 2y^2 + 4x + 1)e^{2x+y}, \quad f''_{xy} = 2(-x^2 + y^2 - x + 2y)e^{2x+y}, \quad f''_{yy} = (-x^2 + y^2 + 4y + 2)e^{2x+y}.$$

Решавањем система $f'_x = f'_y = 0$ добијамо стационарне тачке $M_1(0, 0)$ и $M_2(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$. У тачки M_1 је $A = f''_{xx} = -2$, $B = f''_{xy} = 0$, $C = f''_{yy} = 2$ и $\Delta = B^2 - 4AC = 4$, па тачка M_1 није тачка локалне екстремне вредности; у тачки M_2 је $A = \frac{10}{3e^2}$, $B = \frac{8}{3e^2}$, $C = \frac{10}{3e^2}$ и $\Delta = -\frac{4}{e^4}$, па је тачка M_2 локални минимум функције, $z_{\min} = -\frac{4}{3e^2}$.

3. Користимо да је $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x'}$, па је дата једначина еквивалентна линеарној једначини $x' - x \operatorname{tg} y = \sin y$. Опште решење је

$$x(y) = e^{-\int p(y) dy} \left(C + \int q(y)e^{\int p(y) dy} dy \right), \quad \text{где је } p(y) = -\operatorname{tg} y \text{ и } q(y) = \sin y.$$

Како је $\int p(y) dy = -\int \operatorname{tg} y dy = \ln |\cos y| + C$, добијамо

$$x(y) = \frac{1}{|\cos y|} \left(C + \int \sin y |\cos y| dy \right) = \frac{1}{\cos y} \left(C_1 - \int \cos y d(\cos y) \right) = \frac{C_1}{\cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

Партикуларно решење налазимо из услова $1 = \frac{C_1}{\cos 0} - \frac{\cos 0}{2}$, па је $C_1 = \frac{3}{2}$ и тражено решење је

$$x = \frac{3}{2 \cos y} - \frac{\cos y}{2}.$$

4. Нека је $M = 2x\sqrt{y^2 - x^2}$ и $N = -1 - 2y\sqrt{y^2 - x^2}$. Како је $M'_y = N'_x = \frac{2xy}{\sqrt{y^2 - x^2}}$, дата једначина је са тоталним диференцијалом. Опште решење је

$$u = \int 2x\sqrt{y^2 - x^2} dx + \varphi(y) = -\frac{2}{3}(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \varphi(y),$$

где је $u'_y = N$, тј. $-1 - 2y\sqrt{y^2 - x^2} = -2y\sqrt{y^2 - x^2} + \varphi'(y)$. Дакле, $\varphi'(y) = -1$ и $\varphi(y) = -y + C$, па је опште решење

$$u = -\frac{2}{3}(y^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} - y + C.$$