

Други колоквијум из Анализе - ИТМ

Група 1

1. Израчунати  $I_1 = \int x \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} dx$ .
2. Израчунати  $I_2 = \int_0^{\pi/4} (\cos 2x)^{3/2} \cos x dx$ .
3. Израчунати  $I_3 = \int \frac{dx}{(x+1)(x-\sqrt{x})}$ .
4. Решити диференцијалну једначину  $y' = \frac{x}{x^2 + y^2}$ .

Решења.

$$\begin{aligned}
 1. \quad I_1 &= \left[ \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1}, \quad dv = x dx, \\ du = \frac{dx}{2x^2 + 2x + 1}, \quad v = x^2/2 \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{2x^2 + 2x + 1} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{4} \int \frac{2x^2 + 2x + 1 - 2x - 1}{2x^2 + 2x + 1} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{8} \int \frac{4x + 2}{2x^2 + 2x + 1} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8} \ln(2x^2 + 2x + 1) + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad I_2 &= \int_0^{\pi/4} (1 - 2 \sin^2 x)^{3/2} \cos x dx = \left[ \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right] = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2t^2)^{3/2} dt = \left[ \begin{array}{l} \sqrt{2}t = \sin u \\ \sqrt{2} dt = \cos u du \end{array} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 u)^{3/2} \cos u du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^4 u du = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1 + \cos 2u}{2} \right)^2 du \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \left( 1 + 2 \cos 2u + \frac{1 + \cos 4u}{2} \right) du = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left( \frac{3}{2}u + \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad I_3 &= \left[ \begin{array}{l} x = t^2 \\ dx = 2t dt \end{array} \right] = \int \frac{2t dt}{(t^2 + 1)(t^2 - t)} = \int \frac{2 dt}{(t^2 + 1)(t - 1)} = \int \frac{dt}{t - 1} - \int \frac{t + 1}{t^2 + 1} dt \\
 &= \ln |t - 1| - \frac{1}{2} \ln |t^2 + 1| - \operatorname{arctg} t + C = \ln \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x + 1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.
 \end{aligned}$$

4. Дата једначина је еквивалентна једначини  $x' = \frac{x^2 + y^2}{x}$ , тј.  $x' - x = \frac{y^2}{x}$ , што је Бернулијева једначина,  $x = x(y)$ . Множењем те једначине са  $x$  и увођењем смене  $x^2 = z$ ,  $2xx' = z'$  сводимо је на линеарну једначину  $z' - 2z = 2y^2$ . Опште решење је

$$z = e^{\int 2 dy} \left( C + \int 2y^2 e^{-\int 2 dy} dy \right) = e^{2y} \left( C + \int 2y^2 e^{-2y} dy \right),$$

$$\begin{aligned}
 \int 2y^2 e^{-2y} dy &= \left[ \begin{array}{l} u = 2y^2, \quad dv = e^{-2y} dy, \\ du = 4y dy, \quad v = -e^{-2y}/2 \end{array} \right] = -y^2 e^{-2y} + \int 2ye^{-2y} dy = \left[ \begin{array}{l} u = 2y, \quad dv = e^{-2y} dy, \\ du = 2 dy, \quad v = -e^{-2y}/2 \end{array} \right] \\
 &= -y^2 e^{-2y} - ye^{-2y} - e^{-2y}/2 + C.
 \end{aligned}$$

Дакле, опште решење је

$$x^2 = Ce^{2y} - \frac{1}{2} (2y^2 + 2y + 1).$$