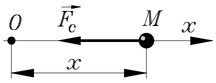
Pravolinijske oscilacije tačke

Osnovne postavke

Kretanje tačke duž prave linije, kod koga se rastojanje posmatrane tačke, od neke nepokretne tačke, više puta naizmenično povećava i smanjuje, naziva se pravolinijsko oscilatorno kretanje. Ovakvo kretanje tačke, duž neke prave linije, nastaje kada na tačku koja je izvedena iz položaja u kome bi mirovala pod dejstvom sila (položaj statičke ravnoteže), deluje sila koja nastoji da vrati tačku u položaj ravnoteže. Takve sile zavise od udaljenja tačke od položaja ravnoteže. Ove sile nazivaju se sile uspostavljanja ili restitucione sile. Najrasprostranjeniji slučaj pravolinijskog oscilatornog kretanja je onaj kod koga je sila uspostavljanja proporcionalna prvom stepenu udaljenja tačke od položaja ravnoteže. Takve sile se nazivaju linearne sile elastičnosti ili linearne sile uspostavljanja i one deluju saglasno Hukovom zakonu.

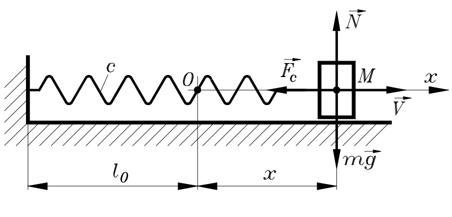


-$F_c = -cx$, gde se koeficijent proporcionalnosti c naziva koeficijent krutosti i gde je x – izduženje opruge. Znak "minus" obezbeđuje da linearna sila elastičnosti bude uvek usmerena ka položaju ravnoteže. Deformacija opruge u položaju statičke ravnoteže naziva se statička deformacija opruge.

Zavisno od vrste oscilatornog kretanja, osim linearne sile elastičnosti $\vec{F}_c$, koja je funkcija samo položaja, može se uzeti da na tačku deluju i sile koje su funkcije samo brzine $\vec{V}$ tačke ili samo vremena *t*. Od svih sila koje su funkcija samo brzine tačke, ovde će biti razmatrane samo sile otpora $\vec{F}_W$, koje mogu biti posledica postojanja: viskoznog trenja – reč je o silama koje nastaju pri kretanju tačke ili tela u fluidu i ove sile otpora će biti označene sa $\vec{F}_{TV}$; suvog trenja – reč je o silama koje nastaju između posmatrane tačke i podloge i ove sile otpora će biti označene sa $\vec{F}_T$. Treću vrstu sila, koje se u razmatranjima pravolinijskih oscilacija tačke uzimaju u obzir, predstavljaju sile koje zavise od vremena. Ove sile će biti označene sa $\vec{F}_\Omega$ i nazivaju se prinudne (poremećajne sile).

U zavisnosti od toga koje sile deluju na tačku, razlikuju se sledeći slučajevi pravolinijskih oscilacija tačke:
- slobodne (sopstvene) neprigušene oscilacije tačke,
- slobodne (sopstvene) prigušene oscilacije tačke i one mogu biti slobodne (sopstvene) prigušene oscilacije tačke pri dejstvu viskoznog trenja i slobodne (sopstvene) prigušene oscilacije tačke pri dejstvu suvog trenja,
- prinudne neprigušene oscilacije tačke,
- prinudne prigušene oscilacije tačke.

Slobodne neprigušene oscilacije tačke



$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{G} + \vec{N}$, $m\ddot{x} = -cx$, $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, $\omega = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$

$$x = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Neka je pretpostavljeno da je u početnom trenutku $t_0 = 0$ tačka započela kretanje iz položaja $x(t_0) = x_0$, početnom brzinom $\vec{V}_0 = \dot{x}(t_0)\vec{i} = \dot{x}_0 \vec{i}$. Tada je $C_1 = x_0$, $C_2 = \dfrac{\dot{x}_0}{\omega}$, $x = x_0 \cos(\omega t) + \dfrac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t)$.

Za $C_1 = R\,sin\alpha$ i $C_2 = R\,cos\alpha$ je $x = R\,sin(\omega t + \alpha)$, gde je $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}$.

Ugao $\varphi = \omega t + \alpha$ je faza slobodnih neprigušenih oscilacija, a ugao $\varphi\big|_{t=0} = \alpha$ je početna faza slobodnih neprigušenih oscilacija $\alpha \in (-\pi, \pi)$, $tg\alpha = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{\omega\, x_0}{\dot{x}_0}$. Sledi da su amplituda i početna faza oscilovanja tačke konstantne veličine koje se određuju iz njenih početnih uslova kretanja. Oscilatorna kretanja tačke kod kojih se koordinata tačke menja po sinusnom ili kosinusnom zakonu nazivaju se harmonijska.

Vreme koje protekne između dva uzastopna prolaza tačke *M* kroz isti položaj, u istom smeru, što predstavlja vreme jedne oscilacije, naziva se period *T* slobodnih neprigušenih oscilacija. Ako su to trenuci t_n i t_{n-2}, tada važi

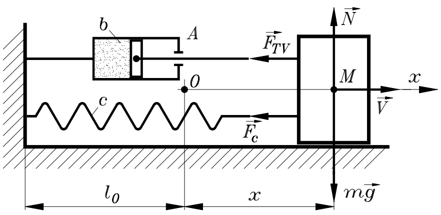
$$x(t_n) = x(t_{n-2}), \qquad sin(\omega t_n + \alpha) = sin(\omega t_{n-2} + \alpha), \qquad \omega t_n + \alpha = \omega t_{n-2} + \alpha + 2\pi,$$

$T = t_n - t_{n-2} = \dfrac{2\pi}{\omega}$, tj. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}$. Osobina perioda oscilovanja da ne zavisi od amplitude naziva se izohronost oscilovanja. Recipročna vrednost perioda oscilovanja T, tj. $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$, naziva se frekvencija oscilovanja i ona određuje broj punih oscilacija u jednoj sekundi (jedinici vremena), pa je $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$.

Ekvivalentna krutost dve paralelno vezane opruge je $c_e = c_1 + c_2$, a u slučaju dve redno vezane opruge važi $\dfrac{1}{c_e} = \dfrac{1}{c_1} + \dfrac{1}{c_2}$.

Slobodne prigušene oscilacije tačke pri dejstvu viskoznog trenja

Na tačku deluje sila elastičnosti opruge $\vec{F}_c$, sila viskoznog trenja $\vec{F}_{TV} = -b\vec{V}$ koja se javlja u cilindru amortizera kao posledica postojanja fluida u cilindru, zatim težina tačke $\vec{G}$ i reakcija glatke podloge $\vec{N}$. Diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke tada je



$$m\vec{a} = \vec{F}_c + \vec{F}_{TV} + \vec{G} + \vec{N}, \quad m\ddot{x} = -cx - b\dot{x},$$

$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega^2 x = 0,$$

$\delta = \dfrac{b}{2m}$ - koeficijent prigušenja.

Karakteristična jednačina je $\lambda^2 + 2\delta\,\lambda + \omega^2 = 0$, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$.

1.) Ako je $\delta < \omega$, tada je u pitanju malo prigušenje, a koreni karakteristične jednačine su konjugovano kompleksni brojevi.

2.) Ako je $\delta > \omega$, tada je u pitanju veliko prigušenje, a koreni karakteristične jednačine su realni i različiti.

3.) Ako je $\delta = \omega$, tada je u pitanju granični (kritični) slučaj prigušenja, a koreni karakteristične jednačine su realni i jednaki.

1.) **Malo prigušenje (**$\delta < \omega$**)**: $\delta^2 - \omega^2 = -p^2$, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm ip$. $x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$,

$$x = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{ipt} + A_2 e^{-ipt}\right), \quad x = e^{-\delta t}\left(C_1\, cos(pt) + C_2\, sin(pt)\right).$$

Neka je tačka M u početnom trenutku $t_0 = 0$ bila u položaju $x_0 = x(0) \neq 0$, i imala brzinu čija je projekcija na osu Ox $\dot{x}_0 = \dot{x}(0) \neq 0$. Tada je

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0 + \delta\, x_0}{p}, \quad x = e^{-\delta t}\left(x_0 \cos(pt) + \frac{\dot{x}_0 + \delta\, x_0}{p} \sin(pt) \right),$$

$$x = Re^{-\delta t} \sin(pt + \alpha)$$

Činilac $e^{-\delta t}$ ukazuje na to da će se amplitude oscilacija smanjivati u toku vremena, pa se ovo kretanje naziva prigušeno.

Vremena τ prolaska tačke kroz ravnotežni položaj dobijaju se iz jednačina

$$Re^{-\delta\tau} \sin(p\tau + \alpha) = 0, \quad \tau_n = \frac{n\pi - \alpha}{p}, \ (n = 1,2,3,...), \quad \tau_n - \tau_{n-2} = \frac{n\pi - \alpha}{p} - \frac{(n-2)\pi - \alpha}{p} = \frac{2\pi}{p}$$

Veličina $T_p = \frac{2\pi}{p}$ ne zadovoljava uslov periodičnosti zbog postojanja člana $e^{-\delta t}$ u zakonu kretanja, tj. $x(t) \neq x(t - T_p)$, a naziva se period prividno periodičnih oscilacija (kvaziperiodičnih oscilacija), ili period slobodnih prigušenih oscilacija, ili uslovni period. Takođe, važi

$$T_p = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}} = \frac{\frac{2\pi}{\omega}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}}, \quad T_p = \frac{T}{\sqrt{1 - \psi^2}}, \text{ gde je } \psi = \frac{\delta}{\omega} \text{ - bezdimenzionalni}$$

koeficijent prigušenja.

2.) **Veliko prigušenje** ($\delta > \omega$): U slučaju kada je $\delta > \omega$, $\delta^2 - \omega^2 > 0$. Ako se uvede oznaka $\delta^2 - \omega^2 = q^2$, $\lambda_{1,2} = -\delta \pm q$. $x = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{qt} + A_2 e^{-qt}\right)$,

$$x = e^{-\delta t}\left[C_1 ch(qt) + C_2 sh(qt)\right].$$

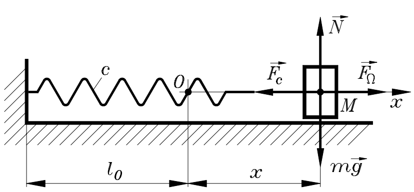
Karakteristika svih ovih kretanja je da su neoscilatorna i da je $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

3.) **Granični slučaj** ($\delta = \omega$): U slučaju kada je $\delta^2 - \omega^2 = 0$, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$,

$x = e^{-\delta t}\left(C_1 t + C_2\right)$, $\lim_{t\to\infty}\left(t\, e^{-\delta t}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\delta t}} = 0$. U graničnom slučaju kretanja, tačka asimptotski teži ka svom ravnotežnom položaju. Takvo kretanje je prigušeno neoscilatorno kretanje ili aperiodično kretanje.

Prinudne neprigušene oscilacije tačke

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_\Omega + \vec{N}, \quad F_{\Omega x}(t) = F_0 \cos(\Omega t).$$



Period prinudne sile $\vec{F}_\Omega$ dat je sa $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega}$.

$$m\ddot{x} = -cx + F_{\Omega x}(t), \quad \ddot{x} + \omega^2 x = h\cos(\Omega t),$$

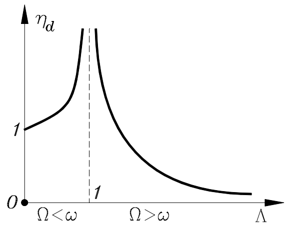
gde je $\omega^2 = \frac{c}{m}$ i $h = \frac{F_0}{m}$.

Homogeni deo rešenja je $x_h = \overline{C}_1 \cos(\omega t) + \overline{C}_2 \sin(\omega t)$, a x_p naziva se partikularni integral i njegov oblik je vezan za odnos veličina ω i Ω. Sa fizičke tačke gledišta, ovaj deo opšteg integrala x posledica je dejstva prinudne sile $\vec{F}_\Omega$, zbog čega se naziva prinudna oscilacija tačke.

1.) Nerezonantni slučaj $\omega \neq \Omega$;

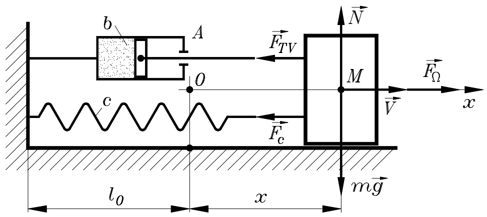
2.) Bijenje (podrhtavanje) $\omega \approx \Omega$ i $\omega \gg 0$;
3.) Rezonancija $\omega = \Omega$.
1.) **Nerezonantni slučaj** $\omega \neq \Omega$**:** $x_p = C\,cos(\Omega t)$, $C(\omega^2 - \Omega^2)cos(\Omega t) \equiv h\,cos(\Omega t)$.

$x_p = \dfrac{h}{\omega^2 - \Omega^2}cos(\Omega t)$, $\quad x_p = \dfrac{\frac{h}{\omega^2}}{1-\Lambda^2}cos(\Omega t)$, gde je sa Λ označena bezdimenzionalna veličina koja se naziva koeficijent poremećaja, tj. $\Lambda = \dfrac{\Omega}{\omega}$. Kako je $F_0 = cf_{st} = mh$, $f_{st} = \dfrac{h}{\omega^2} = C_s$, dobija se $x_p = \dfrac{f_{st}}{1-\Lambda^2}cos(\Omega t)$. Za $\dfrac{f_{st}}{\left|1-\Lambda^2\right|} = C_d$ dobija se $x_p = C_d\,cos(\Omega t)$. Odnos veličina C_d i C_S naziva se dinamički faktor pojačanja i obeležava se sa η_d, tj. $\eta_d = \dfrac{C_d}{C_S} = \dfrac{1}{\left|1-\Lambda^2\right|}$.



2.) Bijenje (podrhtavanje) ($\Omega \approx \omega$ i $\omega \gg 0$)
3.) **Rezonancija** $(\Omega = \omega)$ $x_p = t\left[C\,cos(\Omega t) + D\,sin(\Omega t)\right]$.

Prinudne prigušene oscilacije tačke



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_{TV} + \vec{F}_\Omega + \vec{N}.$$
$$m\ddot{x} = -cx - b\dot{x} + F_0\,cos(\Omega t),$$
$$\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega^2 x = h\,cos(\Omega t),$$

gde je $\omega^2 = \dfrac{c}{m}$, $2\delta = \dfrac{b}{m}$ i $h = \dfrac{F_0}{m}$.

$\delta < \omega \qquad x_h = e^{-\delta t}\left[C_1\,cos(pt) + C_2\,sin(pt)\right];$

$\delta > \omega \qquad x_h = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{qt} + C_2 e^{-qt}\right);$

$\delta = \omega \qquad x_h = e^{-\delta t}\left(C_1 t + C_2\right),$

pri čemu je $p = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ i $q = \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$. Partikularno rešenje je
$x_p = M\,cos(\Omega t) + N\,sin(\Omega t)$, ili $M = C\,cos\gamma$, $N = C\,sin\gamma$, $\quad x_p = C\,cos(\Omega t - \gamma)$.

$$h\cos\Omega t = h\cos\left[(\Omega t - \gamma) + \gamma\right] = h\left[\cos(\Omega t - \gamma)\cos\gamma - \sin(\Omega t - \gamma)\sin\gamma\right]$$
$$C(\omega^2 - \Omega^2)\cos(\Omega t - \gamma) - 2\delta C\sin(\Omega t - \gamma) = h\left[\cos\gamma\cos(\Omega t - \gamma) - \sin\gamma\sin(\Omega t - \gamma)\right]$$
$$C(\omega^2 - \Omega^2) = h\,cos\gamma,\ 2\delta\,\Omega C = h\,sin\gamma,\ C = \frac{h}{\sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\Omega^2}},$$
$$C = \frac{f_{st}}{\sqrt{\left(1-\Lambda^2\right)^2 + 4\psi^2\Lambda^2}},\ tg\gamma = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{2\psi\Lambda}{1-\Lambda^2}.$$