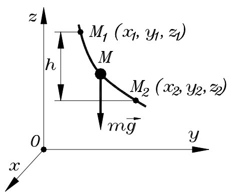
Rad rezultante sistema sila

Neka na tačku *M*, mase *m*, deluje sistem sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$. Rezultanta ovog sistema sila je $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$. Rad rezultante takvog sistema sila između položaja tačke M_1 i M_2, je $A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n) \cdot d\vec{r}$,

$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + ... + \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{r}, \quad A_{M_1M_2} = A_1 + A_2 + ... + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Rad sile teže



Neka se posmatra kretanje tačke *M*, mase *m* u polju teže, u odnosu na Dekartov koordinatni sistem *Oxyz* kod koga je osa *Oz* usmerena vertikalno naviše. Projekcije težine tačke ($\vec{G} = m\vec{g}$) date su sa $X = Y = 0$, $Z = -mg$, pa je

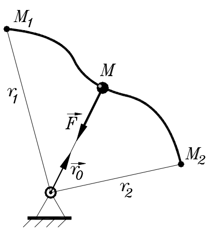
$$A_{M_1M_2}(m\vec{g}) = \pm mgh .$$

U slučaju materijalnog sistema, za *i* – tu tačku važi $\delta A_i = -m_i g dz_i$, a za ceo sistem je

$\delta A = \sum_{i=1}^{n} -m_i g dz_i = -g \sum_{i=1}^{n} m_i dz_i = -mgdz_C$, odakle je

$$A = \int_{z_{C1}}^{z_{C2}} -mgdz = mg(z_{C_1} - z_{C_2})$$

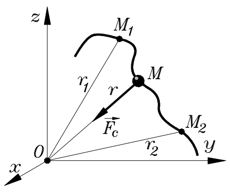
Rad centralne sile



Posmatra se kretanje tačke *M* na koju deluje centralna sila $\vec{F}$, koja je funkcija samo rastojanja i čiji je centar u tački *O*. Tada je $A_{M_1M_2}(\vec{F}) = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r) \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r}$. Ako se uzme u obzir da je $\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2$, odakle diferenciranjem sledi $\vec{r} \cdot d\vec{r} = rdr$, dobija se

$$A_{M_1M_2}(\vec{F}) = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)\, dr .$$

Rad linearne sile elastičnosti



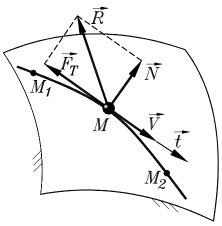
Linearna sila elastičnosti (linearna sila uspostavljanja) $\vec{F}_c$, je sila koja ima smer ka centru sile *O* i koja deluje shodno Hukovom zakonu, tj. $F_c = c|\Delta l|$, gde je *c* – koeficijent krutosti, a Δl – deformacija. Pod deformacijom Δl podrazumeva se veličina $\Delta l = r - r_0$. Sada je

$$A_{M_1M_2}(\vec{F}_c) = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\int_{r_1}^{r_2} c(r - r_0)\, dr ,$$

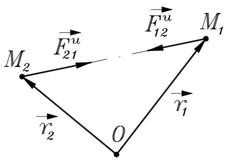
$$A_{M_1M_2}(\vec{F}_c) = \frac{1}{2} c(r_1 - r_0)^2 - \frac{1}{2} c(r_2 - r_0)^2, \quad A_{M_1M_2}(\vec{F}_c) = \frac{1}{2} c(\Delta l_1^2 - \Delta l_2^2) .$$

Rad sile trenja klizanja

Posmatra se kretanje tačke M po realnoj, stacionarnoj, holonomnoj, zadržavajućoj vezi koju čini površ nekog tela. Reakcija veze $\vec{R}$, ima dve komponente: $\vec{N}$ u pravcu normale i $\vec{F}_T$ u pravcu tangente na putanju tačke. Ako otpor kretanju tačke M po površi potiče od suvog trenja, sila trenja klizanja $\vec{F}_T$ je $\vec{F}_T = -\mu N \dfrac{\vec{V}}{V} = -\mu N \operatorname{sgn} \dot{s}\, \vec{t}$. Rad sile trenja klizanja $\vec{F}_T$ pri prelasku tačke M iz položaja M_1 u položaj M_2, je



$$A_{M_1M_2}\left(\vec{F}_T\right) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}_T \cdot d\vec{r} = -\int_{M_1}^{M_2} \mu N \operatorname{sgn} \dot{s}\, ds = -\mu \int_{M_1}^{M_2} N |ds| .$$



Rad unutrašnjih sila izmenljivog i neizmenljivog materijalnog sistema

Neka su uočene bilo koje dve tačke materijalnog sistema. Njihovi vektori položaja su $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$, a sile kojima međusobno deluju su $\vec{F}_{12}^u = -\vec{F}_{21}^u$. Zbir elementarnih radova ovih sila je

$$\delta A^u = \vec{F}_{12}^u d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21}^u d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12}^u (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) = \vec{F}_{12}^u \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F}_{12}^u \cdot d\left(\overrightarrow{M_2M_1}\right),$$

$$\delta A_i^u = \vec{F}_{12}^u \cdot d\left(\overrightarrow{M_2M_1}\right) = \vec{F}_{12}^u \cdot d\left(\overline{M_2M_1}\,\vec{u}\right) = \vec{F}_{12}^u \cdot \left(d\left(\overline{M_2M_1}\right)\vec{u} + \overline{M_2M_1}\, d\vec{u}\right).$$

Kako je: $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$, $2\vec{u} \cdot d\vec{u} = 0$, $\overrightarrow{M_2M_1} \cdot d\vec{u} = 0$, $\vec{F}_{12}^u \cdot d\vec{u} = 0$, tada sledi

- ako je materijalni sistem izmenljiv, tada je $d\left(\overline{M_2M_1}\right) \neq 0$, $\vec{F}_{12}^u \cdot d\left(\overline{M_2M_1}\right)\vec{u} \neq 0$, $\vec{F}_{12}^u \cdot \overline{M_2M_1}\, d\vec{u} = 0$ i $\delta A_i^u \neq 0$, tj. rad unutrašnjih sila izmenljivog materijalnog sistema nije jednak nuli.
- ako je materijalni sistem neizmenljiv, tada je $d\left(\overline{M_2M_1}\right) = 0$ i $\vec{F}_{12}^u \cdot d\vec{u} = 0$, pa je $\delta A_i^u = 0$, tj. rad unutrašnjih sila neizmenljivog materijalnog sistema jednak je nuli. Zaključci izvedeni za posmatrani par unutrašnjih sila proširuju se na rad svih unutrašnjih sila. Kruto telo možemo smatrati neizmenljivim materijalnim sistemom pa je u tom slučaju rad unutrašnjih sila jednak nuli.

Rad spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo

Rad spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo koje se kreće translatorno

Na telo, koje se kreće translatorno, deluje sistem spoljašnjih sila $\vec{F}_i^s$ (i=1,2,...,N). Trajektorije tačaka tela koje se kreće translatorno istovetne, a pomeranja svih tačaka tela međusobno su jednaka, tj. $d\vec{r}_i = d\vec{r}$. Elementarni rad spoljašnje sile je tada $\delta A_i = \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r}$, a elementarni rad svih sila koje deluju na telo je

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r} = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r} .$$

Ukupni rad svih sila, pri prelasku tela iz položaja I, u položaj II, je

$$A = \sum_{i=1}^{N} \int_{I}^{II} \vec{F}_i^s \cdot d\vec{r} = \int_{I}^{II} \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r} .$$

Rad spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose
Neka se telo obrće oko nepokretne ose *Oz*, ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \vec{k} d\varphi / dt$. Ako u nekoj tački tela, čiji je vektor položaja $\vec{r}$, deluje spoljašnja sila $\vec{F}$, tada je njen elementarni rad

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{V} dt = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{M}_O \cdot \vec{k}\, \omega_z dt = M_{Oz} d\varphi ,$$

pa je ukupni rad $A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{Oz} d\varphi$.

Rad spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo koje vrši ravno kretanje
Neka je telo koje vrši ravno kretanje izloženo dejstvu sistema spoljašnjih sila $\vec{F}_i^s$ (i=1,2,...,N). Ako se izvrši paralelno prenošenje svih sila u pol translacije (centar mase), dobija se glavni vektor $\vec{F}_R^s$ i glavni moment $M_{C_\zeta}^s$ spoljašnjih sila. Elementarni rad sada je određen sa $\delta A = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + M_{C_\zeta}^s d\varphi$, dok je rad na konačnom pomeranju

$$A = \int_{C_1}^{C_2} \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_{C_\zeta}^s d\varphi .$$

Rad spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo koje se obrće oko nepokretne tačke
U slučaju kada se telo obrće oko nepokretne tačke *O*, i ako na njega deluje sistem spoljašnjih sila, njihovim paralelnim prenošenjem u nepokretnu tačku *O* dobija se glavni vektor $\vec{F}_R^s$ i glavni moment $\vec{M}_O^s$. Kako je tačka *O* nepokretna, tada rad vrši samo glavni moment. Imajući u vidu da se sferno kretanje može predstaviti obrtanjem oko trenutne ose obrtanja *Op*, elementarni rad svih spoljašnjih sila je

$$\delta A = M_{Op}^s \delta\alpha ,$$

gde je $\delta\alpha$ - elementarni ugao obrtanja tela oko trenutne ose obrtanja. Treba imati u vidu da takav ugao α ne postoji i da $\delta\alpha \neq d\alpha$ jer trenutna ugaona brzina nije izvod nekog ugla po vremenu, već je funkcija tri Ojlerova ugla.

Rad spoljašnjih sila koje deluju na kruto telo koje vrši opšte kretanje
Kada telo vrši opšte kretanje, može se smatrati da se ono obrće oko pokretne tačke *C*, pa u ovom slučaju, za razliku od prethodnog, rad vrši i glavni vektor sistema spoljašnjih sila. Tada je elementarni rad određen sa

$$\delta A = \vec{F}_R^s \cdot d\vec{r}_C + M_{C_p}^s \delta\alpha ,$$

gde je $M_{C_p}^s$ - glavni moment spoljašnjih sila u odnosu na trenutnu osu obrtanja koja prolazi kroz pokretni pol (centar masa) *C*.

Polje sile. Potencijalna energija
Polje sile. Funkcija sile. Konzervativna sila
Polje neke fizičke veličine je ograničen ili neograničen deo prostora čijoj svakoj tački odgovara određena vrednost te fizičke veličine. Zavisno od prirode fizičke veličine postoje skalarna (npr. temperaturno, …) ili vektorska polja (polje sile, brzine, …). Polje sile je ograničen ili neograničen deo prostora u čijoj svakoj tački se oseća dejstvo sile, koja zavisi od položaja tačke i vremena. Biće razmatrana samo stacionarna polja sila, tj. $\vec{F} = \vec{f}(x,y,z)$. U slučaju Dekartovog koordinatnog sistema *Oxyz*, slede odgovarajuća skalarna polja $X = f_1(x,y,z)$ $Y = f_2(x,y,z)$ $Z = f_3(x,y,z)$. Ako postoji takva skalarna funkcija $U(x,y,z)$, čiji su parcijalni izvodi

po koordinatama jednaki projekcijama sile na odgovarajuće ose Dekartovog koordinatnog sistema, tj. $\frac{\partial U}{\partial x} = X$, $\frac{\partial U}{\partial y} = Y$, $\frac{\partial U}{\partial z} = Z$, onda se takva funkcija U naziva funkcija sile, a polje okarakterisano takvom funkcijom naziva se potencijalno ili konzervativno polje sile. Takva sila $\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} = grad\, U$, naziva se konzervativna sila. Funkcija sile $U(x,y,z)$ određena je do na proizvoljnu konstantu jer je $\vec{F} = grad\, U = grad(U + C_1)$, gde je C_1 proizvoljna konstanta. Elementarni rad konzervativne sile $\vec{F}$ ima oblik

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz = dU\ ,\ \delta A = dU\ .$$

Uslovi konzervativnosti sile

Konzervativna sila može se napisati i na sledeći način $\vec{F} = grad\, U = \nabla U$, gde se gradijent funkcije smatra kao primena operatora ∇ (Hamiltonov operator) na skalarnu funkciju U, tj. $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Sada je $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times \nabla U = (\nabla \times \nabla)U = 0$,

$$\nabla \times \vec{F} = rot\, \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0\ ,\ \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0\ .$$

Ovi uslovi nazivaju se uslovi konzervativnosti sile.

Potencijalna energija

Za konzervativne sisteme, tj. sisteme u kojima deluju konzervativne sile, pojam potencijalne energije uvodi se na sledeći način: $E_p(x,y,z) = -U(x,y,z)$, gde je $U(x,y,z)$ funkcija sile. Tada je $\vec{F} = grad\, U = -grad\, E_p$, $X = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$. Elementarni rad tako date konzervativne sile ima oblik

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz = -dE_p\ ,\ \delta A = -dE_p\ ,$$

a rad konzervativnog polja sila, pri prelazu tačke iz položaja M_1 u položaj M_2, je

$$A_{M_1M_2} = -\int_{M_1}^{M_2} dE_p = \int_{M_2}^{M_1} dE_p = E_p(M_1) - E_p(M_2).$$

Rad konzervativnih sila nezavisan je od oblika putanje pokretne tačke kao i od njenog pređenog puta i zavisi samo od potencijalne energije u početnom i krajnjem položaju tačke, pa je rad konzervativne sile po zatvorenoj putanji tačke jednak nuli.

Polazeći od relacije $dE_p = -dU$, sledi $E_p = -U + C_1$, gde je C_1 konstanta koja se može izabrati proizvoljno. Ova činjenica koristi se tako što se položaj tačke $M_0(x_0, y_0, z_0)$ u kojem će, uslovno, potencijalna energija biti jednaka nuli, tj. $E_p(x_0, y_0, z_0) = 0$, može izabrati za tačku nultog potencijala ili nulti nivo potencijalne energije.

Ekvipotencijalne površi

Jednačina $E_p(x,y,z)=C$, predstavlja geometrijsko mesto tačaka u kojima je ista vrednost potencijalne energije. Ta jednačina predstavlja jednačinu površi koja se naziva ekvipotencijalna površ. Za sve vrednosti parametra C dobija se familija ekvipotencijalnih površi. U slučaju kada je $C=0$, dobija se nulta ekvipotencijalna površ.

Postavlja se pitanje pravca i smera konzervativne sile $\vec{F}$. Neka se tačka pod dejstvom konzervativne sile $\vec{F}$ pomera po ekvipotencijalnoj površi saglasno jednačinama koje u odnosu na Dekartov koordinatni sistem *Oxyz* glase $x=x(t)\ y=y(t)\ z=z(t)$. Tada iz sledi $E_p[x(t),y(t),z(t)]=C$, $\dot{E}_p=\frac{\partial E_p}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial E_p}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial E_p}{\partial z}\dot{z}=0$, $X\,\dot{x}+Y\,\dot{y}+Z\,\dot{z}=0$, $\vec{F}\cdot\vec{V}=0$, odakle sledi zaključak: sila konzervativnog polja ima pravac normale na ekvipotencijalnu površ u datoj tački. Za određivanje smera konzervativne sile može se pretpostaviti da se tačka pomera u pravcu i smeru sile konzervativnog polja. Elementarni rad konzervativne sile $\vec{F}$ na tom pomeranju, dat je sa $\delta A=\vec{F}\cdot d\vec{r}>0$. Kako je $\delta A=-dE_p$ sledi da je $dE_p<0$, tj. konzervativna sila uvek je usmerena u stranu smanjivanja potencijalne energije.

Teorema o promeni kinetičke energije materijalnog sistema

Teorema o promeni kinetičke energije tačke može se dobiti iz osnovne jednačine dinamike tačke. Skalarno množeći ovu jednačinu elementarnim priraštajem $d\vec{r}$ vektora položaja tačke dobija se $m\dot{\vec{V}}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot d\vec{r}$. Kako je

$$m\dot{\vec{V}}\cdot d\vec{r}=m\vec{V}d\vec{V}=mVdV=d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)$$

i koristeći relaciju kojom se definiše elementarni rad rezultante $\vec{F}$ svih sila koje deluju na tačku, sledi da je $d\left(\frac{1}{2}mV^2\right)=\delta A$, tj. $dE_k=\delta A$, što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije tačke u diferencijalnom obliku. Integracijom u granicama koje su određene položajem M_1 tačke na početku i položajem M_2 tačke na kraju posmatranog kretanja, dobija se $\frac{mV_2^2}{2}-\frac{mV_1^2}{2}=\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}\,d\vec{r}$, tj. $E_{k2}-E_{k1}=A_{M_1M_2}$, što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije tačke u konačnom obliku.

Neka je dat materijalni sistem od n tačaka, i neka su $\vec{F}_i^s$ i $\vec{F}_i^u$ (i=1,2,...,n) sve spoljašnje i unutrašnje sile koje deluju na tačku M_i. Teorema o promeni kinetičke energije tačke, za posmatranu tačku, glasi $d\left(\frac{1}{2}m_iV_i^2\right)=\vec{F}_i^s\cdot d\vec{r}_i+\vec{F}_i^u\cdot d\vec{r}_i$.

Sabiranjem svih ovakvih relacija, napisanih za svaku tačku sistema, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n}d\left(\frac{1}{2}m_iV_i^2\right)=d\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}m_iV_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^s\cdot d\vec{r}_i+\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^u\cdot d\vec{r}_i\ ,$$

tj. $dE_K=\delta A^s+\delta A^u$, što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije materijalnog sistema u diferencijalnom obliku.

Integracijom prethodne jednačine, pri konačnom pomeranju sistema iz položaja 1 u položaj 2, dobija se teorema o promeni kinetičke energije materijalnog sistema u konačnom obliku

$$E_K(t_2) - E_K(t_1) = \int_{(1)}^{(2)} \delta A^s + \int_{(1)}^{(2)} \delta A^u \,,$$

a ako se integrali na desnoj strani mogu izračunati, tada je $E_K(t_2) - E_K(t_1) = A^s + A^u$
U slučaju neizmenljivog materijalnog sistema, rad unutrašnjih sila jednak je nuli, pa je tada $E_K(t_2) - E_K(t_1) = A^s$. Diferenciranjem po vremenu izraza koji predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije materijalnog sistema u diferencijalnom obliku dobija se $\dot{E}_K = P^s + P^u$, tj. izvod po vremenu kinetičke energije sistema jednak je zbiru snaga svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na materijalni sistem.

Zakon o održanju mehaničke energije materijalnog sistema

Neka se materijalni sistem od *n* tačaka kreće pod dejstvom konzervativnih sila. To znači da postoji funkcija koordinata tačaka sistema

$$E_P = E_P(x_1, y_1, z_1, ..., x_n, y_n, z_n)$$

koja se zove potencijalna energija sistema, takva da je $X_i = -\frac{\partial E_P}{\partial x_i}$, $Y_i = -\frac{\partial E_P}{\partial y_i}$ i $Z_i = -\frac{\partial E_P}{\partial z_i}$. Kako je $\delta A = -dE_p$, sledi da je $A = E_P(t_1) - E_P(t_2)$, pa se iz teoreme o promeni kinetičke energije materijalnog sistema u konačnom obliku dobija da je

$$E_K(t_2) - E_K(t_1) = E_P(t_1) - E_P(t_2), \quad E_K(t_2) + E_P(t_2) = E_K(t_1) + E_P(t_1) = const.,$$

tj. $E_K + E_P = const.$, što predstavlja zakon o održanju mehaničke energije materijalnog sistema.

Ako na tačku deluju konzervativne sile i sila otpora proporcionalna brzini tačke $\vec{F}_V = -b\vec{V}$, tada se iz diferencijalnog oblika teoreme o promeni kinetičke energije tačke dobija

$$dE_K = -dE_P + \vec{F}_V \cdot d\vec{r} = -dE_P - b\vec{V} \cdot d\vec{r} \,.$$

Kako je $b\vec{V} \cdot d\vec{r} = b\vec{V} \cdot \vec{V}dt = bV^2 dt$, $dE_K = -dE_P - bV^2 dt$, tj.

$$d(E_K + E_P) = -2\Phi dt \,,$$

gde je $\Phi = \frac{bV^2}{2}$, funkcija rasipanja (disipacije) ili Relejeva funkcija. Izraz na desnoj strani prethodne jednačine je negativna veličina odakle sledi da, u slučaju delovanja otporne sile, mehanička energija tačke opada. Mehanička energija, u ovom slučaju ne nestaje, ona samo prelazi u drugi oblik energije.