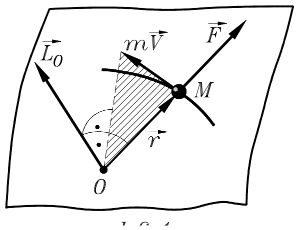
Kretanje tačke pod dejstvom centralne sile

Zakon površine

Neka se posmatra kretanje tačke *M*, mase *m*, na koju deluje samo centralna sila $\vec{F}$, pri čemu je centar sile u nepokretnoj tački *O*. Moment sile $\vec{F}$ u odnosu na tačku *O* je za sve vreme kretanja tačke jednak nuli, tj. $\vec{M}_0(\vec{F})=0$, tako da važi zakon o održanju momenta količine kretanja tačke. Odatle sledi

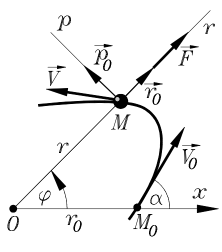


$$\vec{L}_O = m(\vec{r}\times\vec{V}) = const., \quad \vec{L}_O = \vec{r}\times m\vec{V} = \vec{r}_0\times m\vec{V}_0 .$$

Razlikuju se dva slučaja: $\vec{L}_O = const. \neq 0$ i $\vec{L}_O = 0$. Ako je $\vec{L}_O = const. \neq 0$ vektor $\vec{L}_O$ je upravan na vektore $\vec{r}$ i $m\vec{V}$, pa sledi da je trajektorija tačke kriva koja pripada ravni koja prolazi kroz centar sile *O*, a upravna je na vektor $\vec{L}_O$. Ta ravan naziva se Laplasova ravan. Ako je $\vec{L}_O = 0$ tačka se kreće pravolinijski. Sektorska brzina tačke može se izraziti u obliku $\vec{S} = \dfrac{d\vec{A}}{dt} = \dfrac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{V})$, $2\vec{S} = const.$, što znači da je u slučaju kretanja tačke pod dejstvom centralne sile sektorska brzina tačke konstantan vektor, pa je $\dfrac{dA}{dt} = C$, $A = Ct + C_1$, gde je C_1 - integraciona konstanta. Dakle, pri kretanju tačke na koju deluje centralna sila, površina koju opisuje njen vektor položaja menja se proporcionalno vremenu. Na osnovu prethodnog sledi da je $\vec{L}_O = 2m\vec{S}$, a ako se tačka na koju deluje centralna sila kreće u ravni, na primer *Oxy*, a vektor $\vec{L}_O$ je stalno upravan na tu ravan, sledi $L_{Oz} = 2mS_z \equiv C_z$, odnosno $S_z = \dfrac{C_z}{2m}$. Kinetički moment tačke, izražen u prethodnom obliku naziva se integral površine. U polarno-cilindarskom koordinatnom sistemu je

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{r}_0 & \vec{p}_0 & \vec{k} \\ r & 0 & 0 \\ \dot{r} & r\dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix}, \quad \vec{S} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}\,\vec{k} = S_z\vec{k}, \; L_{Oz} = mr^2\dot{\varphi} .$$

Diferencijalne jednačine kretanja tačke pod dejstvom centralne sile



$$V_{r_0} = \dot{r}_0 = V_0\cos\alpha, \quad V_{p_0} = r_0\dot{\varphi}_0 = V_0\sin\alpha$$

Iz osnovne jednačine dinamike tačke dobija se

$$ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r, \quad ma_p = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = F_p .$$

Kako je $a_p = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$, diferencijalne jednačine kretanja tačke su $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$.

Iz druge, od prethodnih jednačina, sledi njen prvi integral koji se može izraziti preko projekcije S_z sektorske brzine $\vec{S}$ na osu *Oz*, tj. $r^2\dot{\varphi} == 2S_z = 2C = const.$. Na taj način je $r^2\dot{\varphi} = r_0^2\dot{\varphi}_0 = r_0V_{p_0} = r_0V_0\,sin\,\alpha$.

Tada važi da je $C = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = \dfrac{1}{2}r_0^2\dot{\varphi}_0 = \dfrac{1}{2}r_0V_0\,sin\,\alpha$, a diferencijalne jednačine su

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = F_r(r) \qquad r^2\dot{\varphi} = 2\mathrm{C} = const.$$

Bineova jednačina

Pretpostavlja se da je $\vec{r}_0 \times m\vec{V}_0 \neq 0$, tj. da je $C \neq 0$. Izvodi po vremenu potega tačke su

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{2C}{r^2} = -2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right),\ \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left[-2C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right] = -\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right),$$

pa je

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{r^2 F_r(r)}{4mC^2},$$

što predstavlja Bineovu jednačinu, tj. diferencijalnu jednačinu kretanja tačke pod dejstvom centralne sile.

Kretanje tačke pod dejstvom Njutnove sile opšte gravitacije

Neka se posmatra kretanje tačke mase *m*, koju privlači telo mase *M* sa centrom privlačenja u tački *O*, silom koja se definiše pomoću Njutnove sile opšte gravitacije $\vec{F} = -f\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$, gde je *f* – univerzalna gravitaciona konstanta, a *r* – rastojanje tačke od centra tela – centra privlačenja. Projekcija sile $\vec{F}$ na pravac koji prolazi kroz centar tela i tačku, a koji je određen jediničnim vektorom $\vec{r}_0$ ($\vec{r} = r\vec{r}_0$), data je sa $F_r(r) = -f\frac{mM}{r^2}$. Diferencijalna jednačina kretanja posmatrane tačke je

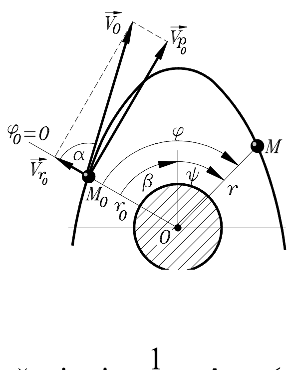
$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{fM}{4C^2},\quad \frac{fM}{4C^2} = \frac{1}{p},\quad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{1}{p},$$

a rešenje $\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)_h + \left(\frac{1}{r}\right)_p$, $\left(\frac{1}{r}\right)_h = C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi$, $\left(\frac{1}{r}\right)_p = \frac{1}{p}$,

$$\frac{1}{r} = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi + \frac{1}{p},\quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = -\frac{1}{r}\frac{V_r}{V_p} = -C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi\,.$$

$$t_0 = 0,\quad r_0 = \overline{OM}_0,\quad V_{r_0} = \dot{r}_0 = V_0\cos\alpha,$$

$$\varphi_0 = 0,\qquad V_{p_0} = r_0\dot{\varphi}_0 = V_0\sin\alpha,$$



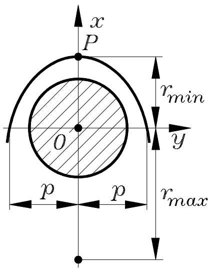
$$C_1 = \frac{1}{r_0} - \frac{1}{p_0},\qquad C_2 = -\frac{ctg\alpha}{r_0},$$

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p_0}\right)\cos\varphi - \frac{ctg\alpha}{r_0}\sin\varphi + \frac{1}{p},$$

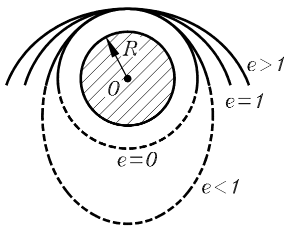
Uvođenjem novih konstanti $\frac{1}{r_0} - \frac{1}{p} = A\cos\beta$, $-\frac{ctg\alpha}{r_0} = A\sin\beta$,

rešenje je $\frac{1}{r} = A\cos(\varphi - \beta) + \frac{1}{p}$, $A = \sqrt{\frac{ctg^2\alpha}{r_0^2} + \frac{(p - r_0)^2}{r_0^2 p^2}}$, $tg\beta = \frac{p\,ctg\alpha}{r_0 - p}$, a ako je $A = \frac{e}{p}$ i $\psi = \varphi - \beta$, rešenje je $r = \frac{p}{1 + e\cos\psi}$ i predstavlja liniju putanje posmatrane tačke. Poteg r dostiže ekstremnu vrednost za $\psi = 0$ pri $e \neq -1$, odnosno za $\psi = \pi$ pri $e \neq 1$.U prvom slučaju imenilac u prethodnoj relaciji ima minimalnu vrednost, tj. $r\big|_{\psi=0} = r_{min} = \frac{p}{1+e}$, a u drugom slučaju poteg dostiže maksimalnu vrednost, tj.

$r\big|_{\psi=\pi} = r_{max} = \dfrac{p}{1-e}$. Zapaža se da su potezima r_{min} i r_{max} određene dve tačke na pravcu $\psi = 0$. Ako se taj pravac usvoji za osu *Ox* Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema *Oxy*, linija putanje tačke može se izraziti i na sledeći način $x^2 + y^2 = (p - ex)^2$, tj. predstavlja jednačinu konusnog preseka u Dekartovim koordinatama. Pri tome je: tačka *O* - fokus (žiža) konusnog preseka; *r* - fokusni poteg; *Ox* - fokusna osa simetrije koja prolazi kroz najbližu tačku *P* konusnog preseka (perihel) i najudaljeniju tačku konusnog preseka (afel), a usmerena je prema perihelu; ψ - ugao između fokusne ose simetrije i potega; *p* - parametar – dužina potega normalnog na fokusnoj osi simetrije i *e* - ekscentricitet konusnog preseka. U slučaju kada je $e = 1$ sledi $y^2 = p^2 - 2px$, što predstavlja jednačinu parabole.



Kada je $e > 1$ izraz $1 + e\cos\psi$ može biti jednak nuli što znači da poteg može da bude i beskonačno veliki. Ovakvo svojstvo ima hiperbola. Kada je $e < 1$ vidi se da izraz $1 + e\cos\psi$ ne može da bude jednak nuli, što znači da potezi nikada ne mogu biti beskonačno veliki. Putanje u ovom slučaju mogu da budu samo elipse. Za $e = 0$ sledi $x^2 + y^2 = p^2$, što znači da je u ovom slučaju reč o kružnici. Iz prethodnih razmatranja može se zaključiti da oblik krive konusnog preseka zavisi samo od ekscentriciteta *e*, koji iz prikazanog postupka rešavanja diferencijalne jednačine predstavlja integracionu konstantu. Zbog toga je potrebno odrediti zavisnost veličine *e* od početnih uslova.



Neka je tačka započela kretanje iz perihela *P* ili afela, tj. neka je u početnom trenutku

$$t_0 = 0, \qquad \psi_0 = 0 \;\vee\; \psi_0 = \pi, \qquad V(t_0) = V_0.$$

Diferenciranjem, po vremenu, jednačine kretanja, dobija se $\dot{r} = \dfrac{pe\sin\psi}{(1 + e\cos\psi)^2}\dot{\psi}$.

Koristeći početne vrednosti sledi $r_0 = r\big|_{\psi=0} = \dfrac{p}{1+e} = r_{\min}$, $r_0 = r\big|_{\psi=\pi} = \dfrac{p}{1-e} = r_{\max}$, $\dot{r}_0 = 0$, proizilazi da početna brzina tačke $\vec{V}_0$ ima samo poprečnu komponentu, tj. $\vec{V}_0 = \vec{V}_{p_0}$, tj. $\angle\left(\vec{r}_0, \vec{V}_0\right) = 90^o$. Sa tako datim početnim uslovima kretanja tačke određena je i veličina *e*. U tom cilju treba najpre odrediti veličinu *p*, a za to je neophodna dvostruka sektorska brzina tačke $2C$. Kako je $2C = r_0 V_0$, sledi $p = \dfrac{r_0^2 V_0^2}{fM}$

$e = \left|\dfrac{r_0 V_0^2}{fM} - 1\right|$. Prethodno analizirano kretanje tačke može poslužiti kao model kretanja planeta Sunčevog sistema. Pri tome uzima se da na planete deluje jedna centralna sila iz centra Sunca, a na satelite pojedinih planeta centralna sila sa centrom u odgovarajućoj planeti. Takva kretanja nazivaju se Keplerova.

Keplerovi zakoni

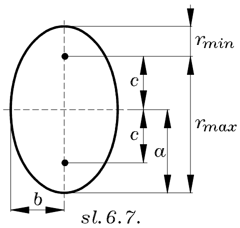
Posmatrajući isključivo kretanje planeta Sunčevog sistema, Kepler je uočio određene zakonitosti pre nego što je Njutn formulisao svoje zakone. Keplerovi zakoni glase:

1.) Sve planete se kreću po eliptičnim putanjama u čijoj se jednoj žiži nalazi Sunce.

2.) Vektori položaja planeta u odnosu na Sunce opisuju za jednaka vremena, jednake površine.

3.) Kvadrati vremena obilaženja planeta oko Sunca, odnose se kao kubovi većih poluosa njihovih putanja.

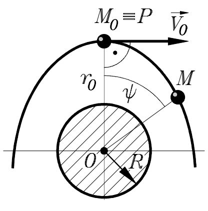
Zapaža se da je razmatrano kretanje pod dejstvom Njutnove sile opšte gravitacije, u saglasnosti sa I Keplerovim zakonom. Takođe se zapaža da je u dosadašnjim razmatranjima proučen i II Keplerov zakon koji ukazuje na činjenicu da je sektorska brzina planeta, pri kretanju planeta oko Sunca, konstantna.



sl. 6.7.

Pri jednom punom obilasku planete oko Sunca vektor položaja planete opiše površinu elipse koja je određena sa $A = ab\pi = CT$ gde je a – velika poluosa elipse, b – mala poluosa elipse, C – sektorska brzina planete i T – vreme obilaska planete oko Sunca. Kako je $a = \frac{1}{2}(r_{min} + r_{max})$, $a = \frac{p}{1-e^2}$, a rastojanje između žiža (fokusa) c elipse dato sa $c = a - r_{min}$ sledi $c = ae$. Mala poluosa elipse b može se povezati sa veličinom p polazeći od relacije $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, pa je $b = \sqrt{ap}$. Sada je vreme obilaska planete oko Sunca $T^2 = \frac{a^3\pi^2 p}{C^2}$, $T^2 = \frac{4\pi^2}{fM}a^3$. Ako su T_1 i T_2 vremena obilaženja dveju planeta oko Sunca, a a_1 i a_2 veće poluose njihovih putanja, sledi $\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{a_1^3}$.

Trajektorije veštačkih Zemljinih satelita



Neka su početni uslovi kretanja satelita dati sa: $r_0 = \frac{p}{1+e} = r_{min}$ ili $r_0 = \frac{p}{1-e} = r_{max}$ i $\angle(\vec{r}_0, \vec{V}_0) = 90^o$, odnosno da se ekscentricitet e može izraziti u obliku $e = \left|\frac{r_0 V_0^2}{fM_Z} - 1\right|$,gde je sa M_Z označena masa Zemlje. Kada se satelit nalazi na površi Zemlje, tada se Njutnova sila opšte gravitacije svodi na $\left|\vec{F}_r(r)\right| = mg = f\frac{mM_Z}{R^2}$, gde je R poluprečnik Zemlje i uzima se da je $R \approx 6\,370\,km$, pa je $fM_Z = gR^2$, tako da je intenzitet početne brzine satelita $V_0 = \sqrt{\frac{gR^2(1+e)}{r_0}}$.

a) Trajektorija satelita biće kružnica ako je $e = 0$ i tada je $V_0 = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}}$.

b) Trajektorija satelita biće elipsa ako je $0 < e < 1$ i tada je $V_0 < \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}}$.

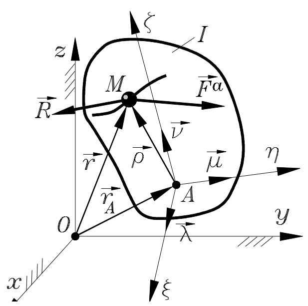
Ako je $\sqrt{\dfrac{gR^2}{r_0}} < V_0 < \sqrt{\dfrac{2gR^2}{r_0}}$ satelit se kreće po elipsi obilazeći Zemlju, a ako je $0 < V_0 < \sqrt{\dfrac{gR^2}{r_0}}$ satelit se vraća na Zemlju (slučaj važan u balistici).

c) Trajektorija satelita biće parabola ako je $e = 1$ i tada je $V_0 = \sqrt{\dfrac{2gR^2}{r_0}}$.

d) Trajektorija satelita biće hiperbola ako je $e > 1$ i tada je $V_0 > \sqrt{\dfrac{2gR^2}{r_0}}$.

Za uslove poletanja satelita u blizini Zemlje, kada je $r_0 = R$, dobija se prva kosmička brzina, tj. neophodan intenzitet početne brzine satelita da bi on kružio oko Zemlje $V_1 = V_0 = \sqrt{gR} \approx 7{,}9\dfrac{km}{s}$. Druga kosmička brzina, tj. neophodan intenzitet početne brzine satelita da bi on napustio orbitu oko Zemlje je $V_2 = V_0 = \sqrt{2gR} \approx 11{,}2\dfrac{km}{s}$. Samo trajektorije oblika kružnice i elipse, koje se postižu početnim brzinama određenim sa $7{,}9\dfrac{km}{s} \le V_0 < 11{,}2\dfrac{km}{s}$ mogu biti trajektorije veštačkih Zemljinih satelita.

Dinamika relativnog kretanja tačke
Diferencijalne jednačine relativnog kretanja tačke



Kretanje tačke u odnosu na inercijalne koordinatne siteme koji se smatraju uslovno nepokretnim naziva se apsolutno kretanje tačke. Postoji čitav niz problema kretanja tačke koja se kreće u odnosu na neko telo, pri čemu se to telo kreće na proizvoljan način u odnosu na inercijalni koordinatni sistem. Mnoge od ovih problema pogodnije je posmatrati u odnosu na neinercijalne koordinatne sisteme vezane za to pokretno telo. Kretanje tačke u odnosu na takve koordinatne sisteme naziva se relativno kretanje tačke. U odnosu na takve koordinatne sisteme, u opštem slučaju, neće važiti osnovna jednačina dinamike tačke.

Osnovna jednačina dinamike tačke, u odnosu na inercijalni (uslovno nepokretni) koordinatni sistem *Oxyz* je: $m\vec{a} = \vec{F}^a + \vec{R}$, gde je $\vec{a}$ apsolutno ubrzanje posmatrane tačke, $\vec{F}^a$ rezultanta svih aktivnih sila koje deluju na tačku, a $\vec{R}$ reakcija veze. Poznato je iz kinematike da važi

$$\vec{a} = \vec{a}_p + \vec{a}_r + \vec{a}_{cor}\,,\quad \vec{a}_p = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon}_p \times \vec{\rho} + \vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho})\,,\quad \vec{a}_r = \frac{d_r\vec{V}_r}{dt} = \frac{d_r^2\vec{\rho}}{dt^2} = \ddot{\xi}\,\vec{\lambda} + \ddot{\eta}\,\vec{\mu} + \ddot{\varsigma}\,\vec{\nu}$$

$\vec{a}_{cor} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r$, gde je: $\vec{a}_A$ - ubrzanje tačke *A* (pola translacije), $\vec{\omega}_p$ - prenosna ugaona brzina (ugaona brzina tela *I* u odnosu na inercijalni koordinatni sistem), $\vec{\varepsilon}_p$ - prenosno ugaono ubrzanje (ugaono ubrzanje tela *I* u odnosu na inercijalni koordinatni sistem), $\vec{\rho} = \xi\,\vec{\lambda} + \eta\,\vec{\mu} + \varsigma\,\vec{\nu}$ - vektor položaja tačke u odnosu na pokretni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$, $\vec{V}_r$ - relativna brzina tačke M, tj. $\vec{V}_r = \dfrac{d_r\vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\,\vec{\lambda} + \dot{\eta}\,\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\,\vec{\nu}$, pri čemu je sa

$\frac{d_r}{dt}$ označen lokalni (relativni) izvod po vremenu, i gde su $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ i $\vec{\nu}$ - jedinični vektori pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$. Sada je $m\vec{a}_p + m\vec{a}_r + m\vec{a}_{cor} = \vec{F}^a + \vec{R}$, odnosno $m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} - m\vec{a}_p - m\vec{a}_{cor}$. Ako se uvedu oznake $-m\vec{a}_p = \vec{F}_p^{in}$, $-m\vec{a}_{cor} = \vec{F}_{cor}^{in}$, prethodna jednačina dobija oblik

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{cor}^{in}.$$

Vektori $\vec{F}_p^{in}$ i $\vec{F}_{cor}^{in}$ imaju dimenziju sile, a njihov smer je suprotan od smera vektora ubrzanja $\vec{a}_p$ i $\vec{a}_{cor}$, respektivno. Vektor $\vec{F}_p^{in}$ naziva se prenosna inercijalna sila, a vektor $\vec{F}_{cor}^{in}$ - Koriolisova inercijalna sila.

Prethodna jednačina određuje kretanje tačke u odnosu na neinercijalni koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ i ona se naziva osnovna jednačina dinamike relativnog kretanja tačke.

U opštem slučaju, prenosna inercijalna sila ima tri komponente: $\vec{F}_{pA}^{in} = -m\vec{a}_A$ - prenosna translatorna, $\vec{F}_{p1}^{in} = -m(\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho})$ - prenosna obrtna i $\vec{F}_{p2}^{in} = -m(\vec{\omega}_p \times (\vec{\omega}_p \times \vec{\rho}))$ - prenosna aksipetalna.

Ako je za neinercijalni (pokretni) koordinatni sistem $A\xi\eta\zeta$ izabran Dekartov pravougli koordinatni sistem, tada je

$$m\ddot{\xi} = F_\xi^\alpha + R_\xi + F_{p\xi}^{in} + F_{cor\xi}^{in}, m\ddot{\eta} = F_\eta^\alpha + R_\eta + F_{p\eta}^{in} + F_{cor\eta}^{in}, m\ddot{\zeta} = F_\zeta^\alpha + R_\zeta + F_{p\zeta}^{in} + F_{cor\zeta}^{in}.$$

Ako je za neinercijalni (pokretni) koordinatni sistem izabran prirodni trijedar, u tački relativne putanje, tada se dobijaju sledeće skalarne diferencijalne jednačine relativnog kretanja tačke

$$m\frac{dV_r}{dt} = F_t^a + R_t + F_{pt}^{in},\ \ m\frac{V_r^2}{R_k} = F_n^a + R_n + F_{pn}^{in} + F_{cor\,n}^{in},\ \ 0 = F_b^a + R_b + F_{pb}^{in} + F_{cor\,b}^{in}.$$

Relativna ravnoteža tačke

Pod relativnom ravnotežom (mirovanjem) tačke podrazumeva se njeno mirovanje u odnosu na neinercijalni koordinatni sistem. Tada je $\vec{V}_r = 0$, $\vec{a}_r = 0$ i $\vec{F}_{cor}^{in} = 2\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r = 0$, pa je

$$0 = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in}.$$

Ova jednačina predstavlja jednačinu relativne ravnoteže tačke.

Teorema o promeni kinetičke energije pri relativnom kretanju tačke

Diferencijalna jednačina relativnog kretanja tačke je

$$m\vec{a}_r = \vec{F}^a + \vec{R} + \vec{F}_p^{in} - 2m(\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r).$$

Množeći skalarno, relativnom brzinom tačke $\vec{V}_r = \frac{d_r\vec{\rho}}{dt} = \dot{\xi}\,\vec{\lambda} + \dot{\eta}\,\vec{\mu} + \dot{\varsigma}\,\vec{\nu}$, levu i desnu stranu prethodne jednačine, sledi

$$m\vec{V}_r \cdot \frac{d_r\vec{V}_r}{dt} = \vec{F}^a \cdot \vec{V}_r + \vec{R} \cdot \vec{V}_r + \vec{F}_p^{in} \cdot \vec{V}_r - 2m(\vec{\omega}_p \times \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r. \quad (7.47)$$

Kako je $(\vec{\omega} \times \vec{V}_r) \cdot \vec{V}_r = 0$, tj. $m\vec{V}_r \cdot d_r\vec{V}_r = \vec{F}^a \cdot d_r\vec{\rho} + \vec{R} \cdot d_r\vec{\rho} + \vec{F}_p^{in} \cdot d_r\vec{\rho}$. Leva strana ove jednačine može se transformisati na sledeći način

$m\vec{V}_r \cdot d_r\vec{V}_r = d_r\left(\frac{1}{2}mV_r^2\right) = dE_{kr}$, što znači da predstavlja diferencijal kinetičke energije tačke pri njenom relativnom kretanju. Sabirci na desnoj strani jednačine predstavljaju elementarne radove odgovarajućih sila na relativnoj putanji tačke. To znači da se ta jednačina može pisati u obliku

$$dE_{kr} = \delta A_r\left(\vec{F}^a\right) + \delta A_r\left(\vec{R}\right) + \delta A_r\left(\vec{F}_p^{in}\right),$$

što predstavlja diferencijalni oblik teoreme o promeni kinetičke energije tačke pri njenom relativnom kretanju i može se formulisati na sledeći način: diferencijal kinetičke energije tačke, pri njenom relativnom kretanju, jednak je zbiru elementarnih radova na relativnom pomeranju rezultante svih aktivnih sila, reakcije veze i prenosne inercijalne sile.

Integracijom, u odgovarajućim granicama relativne brzine tačke, od V_{r_1} do V_{r_2} i u granicama od položaja M_1 do položaja M_2 relativne putanje, tj.

$$\int_{V_{r_1}}^{V_{r_2}} d_r\left(\frac{1}{2}mV_r^2\right) = \int_{M_1}^{M_2} \delta A_r\left(\vec{F}^a\right) + \int_{M_1}^{M_2} \delta A_r\left(\vec{R}\right) + \int_{M_1}^{M_2} \delta A_r\left(\vec{F}_p^{in}\right),$$

dobija se

$$\frac{1}{2}mV_{r_2}^2 - \frac{1}{2}mV_{r_1}^2 = A_{r(M_1M_2)}\left(\vec{F}^a\right) + A_{r(M_1M_2)}\left(\vec{R}\right) + A_{r(M_1M_2)}\left(\vec{F}_p^{in}\right), \quad (7.52)$$

što predstavlja teoremu o promeni kinetičke energije tačke u konačnom obliku, pri njenom relativnom kretanju, a koja se može formulisati na sledeći način: konačna promena kinetičke energije tačke, pri njenom relativnom kretanju, na nekom konačnom relativnom pomeranju tačke, jednaka je zbiru radova svih aktivnih sila, reakcija veza i prenosne inercijalne sile na tom istom relativnom pomeranju tačke.