Opšte teoreme i zakoni dinamike sistema

Količina kretanja tačke

Pod količinom kretanja tačke ($\vec{K}$) podrazumeva se vektorska veličina koja je jednaka proizvodu mase *m* tačke i njene brzine $\vec{V}$, tj. $\vec{K} = m\,\vec{V}$.

Količina kretanja materijalnog sistema

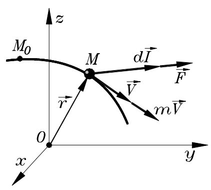
Neka materijalni sistem čini *n* tačaka, čije su mase m_i, i=1,2,...,*n*. Količina kretanja materijalnog sistema je tada $\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i$.

Imajući u vidu relaciju za određivanje položaja centra masa $m\vec{r}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$, tada je

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}_C) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_i \vec{r}_i), \quad m\frac{d\vec{r}_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad m\vec{V}_C = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i ,$$

$$\vec{K} = m\vec{V}_C = \vec{K}_C$$

Impuls sile



1.) Elementarni impuls sile: Pod elementarnim impulsom sile $d\vec{I}$ podrazumeva se veličina koja je jednaka proizvodu sile $\vec{F}$ koja deluje na tačku i infinitezimalno malog intervala vremena dt, tj. $d\vec{I} = \vec{F}dt$.

2.) Impuls sile (ukupni impuls sile): Ako tačka pod dejstvom sile $\vec{F}$ pređe iz položaja M_0 u kome se našla u trenutku t_0 u položaj *M*, koji odgovara trenutku *t*, tada je u datom intervalu vremena (t_0,*t*) impuls sile $\vec{F}$ određen sa $\vec{I} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt$.

Teorema o promeni količine kretanja materijalnog sistema

Diferencijalna jednačina kretanja *i*-te reprezentativne materijalne tačke je

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\,s} + \vec{F}_i^{\,u}, \qquad \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{V}_i\right) = \frac{d\vec{K}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\,s} + \vec{F}_i^{\,u},$$

odakle se sumiranjem, za sve tačke, dobija $\sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{K}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,s} + \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,u}$.

Kako je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,s} = \vec{F}_R^{\,s}$ i $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^{\,u} = \vec{F}_R^{\,u} = 0$, tada je $\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{F}_R^{\,s}$, tj.: izvod po vremenu količine kretanja materijalnog sistema jednak je glavnom vektoru spoljašnjih sila koje deluju na materijalni sistem. Projektovanjem članova prethodne relacije na ose izabranog koordinatnog sistema, npr. *Oxyz*, dobijaju se teoreme o promeni količine kretanja materijalnog sistema u odnosu na ose, tj.

$$\dot{K}_x = X_R^s, \quad \dot{K}_y = Y_R^s, \quad \dot{K}_z = Z_R^s .$$

Ako se teorema o promeni količine kretanja materijalnog sistema, u diferencijalnom obliku, napiše kao $d\vec{K} = \vec{F}_R^{\,s} dt$, integracijom se dobija

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_R^s dt = \vec{I}_R^s ,$$

što predstavlja teoremu o promeni količine kretanja materijalnog sistema, u (konačnom) integralnom obliku, koja glasi: promena količine kretanja materijalnog sistema u konačnom intervalu vremana jednak je impulsu glavnog vektora spoljašnjih sila koje deluju na materijalni sistem, u istom intervalu vremena. Odgovarajuće skalarne jednačine su

$$K_{x_1} - K_{x_0} = \int_{t_0}^{t_1} X_R^s dt = I_{R_x}^s , \quad K_{y_1} - K_{y_0} = \int_{t_0}^{t_1} Y_R^s dt = I_{R_y}^s , \quad K_{z_1} - K_{z_0} = \int_{t_0}^{t_1} Z_R^s dt = I_{R_z}^s .$$

Zakon o održanju količine kretanja materijalnog sistema i zakon o održanju položaja centra masa

Ako na materijalni sistem deluje takav sistem spoljašnjih sila da njegov glavni vektor jednak nuli, tj. $\vec{F}_R^s = 0$, tada iz teoreme o promeni količine kretanja sledi zakon o održanju količine kretanja materijalnog sistema, u obliku

$$d\vec{K} = 0 ,\ \vec{K} = const. ,\ \text{ili}\ \vec{K}_1 = \vec{K}_0 = const.$$

U specijalnom slučaju kada je i brzina centra masa materijalnog sistema u nekom trenutku jednaka nuli, tada iz zakona o održanju količine kretanja materijalnog sistema sledi

$$\vec{K} = \vec{K}_C = m\vec{V}_C = m\dot{\vec{r}}_C = 0 , \qquad \vec{r}_C = const.$$

tj. u tom slučaju ne menja se položaj centra masa materijalnog sistema.
Često se dešava da za neku od osa inercijalnog koordinatnog sistema (npr. osu Ox) važi $X_R^s = 0$. Tada važi zakon o održanju količine kretanja za osu, tj. $K_x = const.$ U specijalnom slučaju, ako je u i nekom trenutku t_0 zadovoljeno $K_x(t_0) = 0$, tada je $K_x = 0$, tj.

$$K_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \right) = 0 , \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = const. , x_C = const. , \sum_{i=1}^{n} m_i x_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i(t_1) .$$

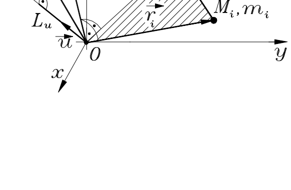
Moment količine kretanja tačke

Moment količine kretanja (kinetički moment) tačke, u odnosu na neki pol O je

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{K} = \vec{r} \times m\vec{V} ,$$

gde je $\vec{r}$ - vektor položaja tačke u odnosu na pol O, a $\vec{K}$ njena količina kretanja. Moment količine kretanja tačke, u odnosu na neku osu Ou je projekcija na tu osu kinetičkog momenta $\vec{L}_O$.

Moment količine kretanja materijalnog sistema



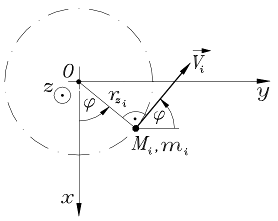
Moment količine kretanja (kinetički moment) materijalnog sitema, u odnosu na neki pol O je glavni vektor momenata količine kretanja tačaka sistema određenih u odnosu na isti pol

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_{O\,i} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O(\vec{K}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i .$$

Moment količine kretanja materijalnog sistema u odnosu na neku osu koja prolazi kroz pol O je projekcija na tu osu kinetičkog momenta $\vec{L}_O$ u odnosu na taj pol O $L_u = \vec{L}_O \cdot \vec{u}$. Kako je

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ m_i \dot{x}_i & m_i \dot{y}_i & m_i \dot{z}_i \end{vmatrix},$$

tada je



$$L_x = \vec{L}_O \cdot \vec{i} = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i), \ldots,$$

$$L_z = \vec{L}_O \cdot \vec{k} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i).$$

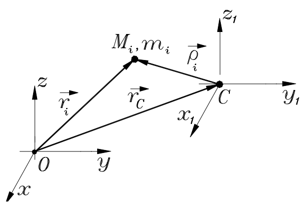
U slučaju obrtanja materijalnog sistema oko nepokretne ose, npr. ose *Oz*, važi $x_i = r_{z_i} \cos\varphi$, $y_i = r_{z_i} \sin\varphi$ i $\dot{\varphi} = \omega_z$, pa je

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega_z r_{z_i}^2 (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \omega_z \sum_{i=1}^{n} m_i r_{z_i}^2 = J_z \omega_z .$$

Do istog rezultata se dolazi i kada je u pitanju kruto telo.

Veza između momenta količine kretanja materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol i središte masa sistema

Uočimo dva koordinatna sistema: *Oxyz* – Dekartov inercijalni koordinatni sistem, i $Cx_1 y_1 z_1$ - Dekartov translatorno pokretni koordinatni sistem smešten u središtu masa. Položaj proizvoljne tačke materijalnog sistema određen je sa $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$, pa je



$$\vec{V}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{V}_C + \vec{V}_{M_i}^C .$$

Sada je

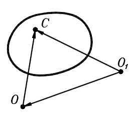
$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i = \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_C + \vec{\rho}_i) \times m_i \left(\vec{V}_C + \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_C \times m_i \vec{V}_C) + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_C \times m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\vec{\rho}_i \times m_i \vec{V}_C) + \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho}_i \times m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \right).$$

Imajući u vidu da je $\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_C \times m_i \vec{V}_C) = \vec{r}_C \times \vec{K}$, $\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_C \times m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \right) = 0$, $\sum_{i=1}^{n} (\vec{\rho}_i \times m_i \vec{V}_C) = \sum_{i=1}^{n} (m_i \vec{\rho}_i \times \vec{V}_C) = 0$, $\sum_{i=1}^{n} \left(\vec{\rho}_i \times m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \right) = \vec{L}_C^r$, dobija se

$$\vec{L}_O = \vec{r}_C \times \vec{K} + \vec{L}_C^r = \overrightarrow{OC} \times \vec{K} + \vec{L}_C^r$$



Veza između kinetičkih momenata u odnosu na dva nepokretna pola

Neka su kinetički momenti u odnosu na nepokretne polove O i O_1

određeni sa $\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \times \vec{K} + \vec{L}_C^r$ i $\vec{L}_{O_1} = \overrightarrow{O_1C} \times \vec{K} + \vec{L}_C^r$. Sada je $\vec{L}_{O_1} = \vec{L}_O + (\overrightarrow{O_1C} - \overrightarrow{OC}) \times \vec{K}$. Kako je $\overrightarrow{O_1C} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OC}$, dobija se relacija koja pokazuje promenu kinetičkog momenta pri promeni pola, tj. $\vec{L}_{O_1} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{K}$. Ako materijalni sistem vrši translatorno kretanje, tada je $\vec{L}_C^r = 0$, pa je kinetički moment takvog materijalnog sistema $\vec{L}_O = \overrightarrow{OC} \times \vec{K}$.

Teorema o promeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu

Za i-tu tačku materijalnog sistema važi

$\dot{\vec{L}}_O^i = \dot{\vec{r}}_i \times m_i\vec{V}_i + \vec{r}_i \times \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{V}_i\right)$, $\dot{\vec{r}}_i \times m_i\vec{V}_i = \vec{V}_i \times m_i\vec{V}_i = 0$, $\dot{\vec{L}}_O^i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$, $\dot{\vec{L}}_O^i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i\right)$,

gde je $\vec{F}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u$, pa je $\dot{\vec{L}}_O^i = \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^s\right) + \vec{M}_O\left(\vec{F}_i^u\right)$. Sabirajući prethodnu relaciju, za svaku od n tačaka materijalnog sistema, dobija se

$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^s + \vec{M}_O^u$. Imajući u vidu da je glavni moment unutrašnjih sila $\vec{M}_O^u = 0$, sledi

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^s,$$

tj. izvod po vremenu kinetičkog momenta materijalnog sistema, određenog u odnosu na nepokretni pol, jednak je glavnom momentu svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem u odnosu na isti nepokretni pol.

Projektujući članove prethodne relacije na ose nepokretnog koordinatnog sistema, npr. $Oxyz$, dobijaju se izrazi koji predstavljaju teoremu o promeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretnu osu

$$\dot{L}_{Ox} = M_{Ox}^s, \quad \dot{L}_{Oy} = M_{Oy}^s, \quad \dot{L}_{Oz} = M_{Oz}^s.$$

Zakon o održanju kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu

Ako za sve vreme kretanja materijalnog sistema važi da je $\vec{M}_O^s = 0$, tada je $\dot{\vec{L}}_O = 0$, tj

$$\vec{L}_O = const.$$

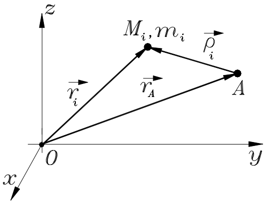
Dakle, ako je za sve vreme kretanja materijalnog sistema glavni moment spoljašnjih sila u odnosu na nepokretni pol jednak nuli, tada je kinetički moment u odnosu na isti pol konstantan.

Ako na materijalni sistem deluje takav sistem sila da za neku nepomičnu osu Ou važi da je $M_{Ou}^s = 0$, tada je $\dot{L}_{Ou} = 0$, tj. $L_{Ou} = const.$, što predstavlja zakon o održanju kinetičkog momenta u odnosu na nepokretnu osu.

U posebnom slučaju, kada je $\vec{M}_O^s = 0$, a u nekom trenutku t_0 je $\vec{L}_O(t_0) = 0$, tada je $\vec{L}_O = 0$, što predstavlja specijalni slučaj zakona o održanju kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni pol. Ako za za neku nepomičnu osu Ou važi da je $M_{Ou}^s = 0$, a u nekom trenutku t_0 je $L_{Ou}(t_0) = 0$, tada je u svakom trenutku $L_{Ou} = 0$.

Teorema o promeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na pokretni pol i pokretnu osu

Neka je sa $\vec{r}_i$ određen položaj i-te materijalne tačke u odnosu na pol O nepokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ i neka je sa $\vec{\rho}_i$ određen položaj te tačke u odnosu na pokretni pol A.Tada važi $\vec{r}_i = \vec{r}_A + \vec{\rho}_i$ i $\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i\vec{V}_i$, tj. $\vec{L}_A = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{r}_i - \vec{r}_A\right) \times m_i\vec{V}_i$.



Diferenciranjem po vremenu dobija se

$$\dot{\vec{L}}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_i \times m_i \vec{V}_i - \sum_{i=1}^{n} \vec{V}_A \times m_i \vec{V}_i + \sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \dot{\vec{V}}_i \ .$$

Prvi član u prethodnom izrazu jednak je nuli, a kako je $\vec{K} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i$ i

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{r}_i - \vec{r}_A) \times m_i \dot{\vec{V}}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times \left(\vec{F}_i^{\,s} + \vec{F}_i^{\,u} \right) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i^{\,s} = \vec{M}_A^{\,s} \, ,$$

dobija se teorema o promeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na pokretni pol**,** u obliku

$$\dot{\vec{L}}_A + \vec{V}_A \times m \vec{V}_C = \vec{M}_A^{\,s} \, .$$

Izrazi za teoreme o promeni kinetičkog momenta u odnosu na nepokretni i pokretni pol razlikuju se za član $\vec{V}_A \times m\vec{V}_C$. Ove dve teoreme imaće isti oblik ako je:

1. $\vec{V}_A = 0$, tj. i pol *A* je nepokretan,
2. $\vec{V}_C = 0$, tj. pol *A* je pokretan, a centar masa nepokretan,
3. $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_C$, tj. brzine oba pola su paralelne
4. $A \equiv C$, tj. za pokretni pol se usvaja središte masa *C*, i tada je $\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^{\,s}$.

U specijalnom slučaju, kada je $\vec{M}_C^{\,s} = 0$, sledi da je $\vec{L}_C = const.$, što predstavlja zakon o održanju kinetičkog momenta u odnosu na središte masa. Ravan koja je u tom slučaju upravna na $\vec{L}_C$ i nepokretna, naziva se Laplasova ravan. Ako je $\vec{M}_C^{\,s} = 0$ i ako su u nekom trenutku sve tačke sistema mirovale tada je za sve vreme kretanja $\vec{L}_C = 0$.

Projektovanjem članova izraza $\dot{\vec{L}}_A + \vec{V}_A \times m\vec{V}_C = \vec{M}_A^{\,s}$ na pokretnu osu *Ap*, dobija se teorema o promeni kinetičkog momenta materijalnog sistema u odnosu na pokretnu osu, u obliku

$$\left(\dot{\vec{L}}_{Ar} \right)_{Ap} + \left(\vec{\Omega} \times \vec{L}_A \right)_{Ap} + \left(\vec{V}_A \times m\vec{V}_C \right)_{Ap} = M_{Ap}^{\,s} \, ,$$

gde je $\vec{\Omega}$ - ugaona brzina pokretne ose.

Kinetička energija materijalnog sistema

Kinetička energija tačke je pozitivna skalarna veličina koja se definiše kao $E_k = \frac{1}{2} m V^2$, gde je *m* - masa tačke, a *V* intenzitet njene brzine. Kinetička energija materijalnog sistema predstavlja zbir kinetičkih energija pojedinih tačaka, tj.

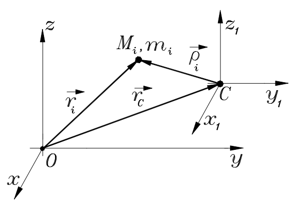
$$E_K = \sum_{i=1}^{n} E_{K_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i \right).$$

Kinetička energija krutog tela, koje je podeljeno na elementarne deliće masa *dm* je

$$E_K = \frac{1}{2} \int_{\mathrm{V}} V^2 dm \, .$$

Kenigova teorema

Neka se kretanje materijalnog sistema posmatra u odnosu na nepokretni koordinatni sistem *Oxyz*. Uvođenjem translatorno pokretnog koordinatnog sistema $Cx_1y_1z_1$,



položaj i-te tačke određen je sa $\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{\rho}_i$. Apsolutna brzina tačke je $\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i = \vec{V}_C + \vec{V}_{r_i}$, pa je kinetička energija

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{V}_i \cdot \vec{V}_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{V}_C + \vec{V}_{r_i}\right)\cdot\left(\vec{V}_C + \vec{V}_{r_i}\right),$$

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_C^2 + 2\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_C \cdot \vec{V}_{r_i} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{V}_{r_i} \cdot \vec{V}_{r_i}\right),$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_C^2 = \frac{1}{2}V_C^2\sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{1}{2}mV_C^2,\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_C \cdot \vec{V}_{r_i} = \vec{V}_C\,\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = 0,$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{V}_{r_i} \cdot \vec{V}_{r_i}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{r_i}^2, \quad E_K = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_{r_i}^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}mV_C^2 + E_{K_{rel}},$$

što predstavlja Kenigovu teoremu: Kinetička energija materijalnog sistema jednaka je zbiru kinetičke energije centra masa, kao da je u njemu skoncentrisana masa celog sistema, i kinetičke energije relativnog kretanja materijalnog sistema u odnosu na centar masa.

Kinetička energija tela koje se kreće translatorno

U slučaju translatornog kretanja tela važi da je $\vec{V}_i = \vec{V}_C$ pa je kinetička energija $E_K = \frac{1}{2}V^2\int_{\mathbf{V}} dm = \frac{1}{2}mV^2$. Isti izraz može se dobiti i iz Kenigove teoreme. U slučaju translatornog kretanja tela je $\vec{V}_r = 0$, pa je $E_K = \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}mV^2$.

Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne ose

Neka se telo obrće oko nepokretne ose Oz. Brzina uočenog elementa mase dm je $V = r_z\omega_z$, gde je r_z - rastojanje uočenog elementa od ose obrtanja, a ω_z - ugaona brzina tela. Tada je

$$E_K = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{V}} V^2 dm = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{V}} \left(r_z\omega_z\right)^2 dm = \frac{1}{2}\omega_z^2\int_{\mathbf{V}} r_z^2 dm = \frac{1}{2}J_z\omega_z^2.$$

Kinetička energija tela koje vrši ravno kretanje

Koristeći Kenigovu teoremu $E_K = \frac{1}{2}mV_C^2 + E_{K_{rel}}$, i uočavajuću delić mase tela, važi $E_{K_{rel}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i V_{r_i}^2$. Kako je brzina uočenog delića $V_{r_i} = \rho_i\omega$, gde je ρ_i rastojanje delića od centra masa, a ω ugaona brzina tela, dobija se

$$E_{K_{rel}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\left(\rho_i\omega\right)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{N}\Delta m_i\rho_i^2.$$

Graničnim procesom kada $N \to \infty$, sledi $E_{K_{rel}} = \frac{1}{2}J_{C_\xi}\omega^2$, gde je sa J_{C_ξ} označen aksijalni moment inercije tela za pokretnu osu koja prolazi kroz centar masa i upravna je na ravan kretanja tela. Tada je

$$E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_\xi} \omega^2 .$$

Kinetička energija tela koje se obrće oko nepokretne tačke

Brzina uočenog delića tela, mase Δm_i, je $\vec{V}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i = \omega(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_i)$, gde je $\vec{\omega}$ - trenutna ugaona brzina tela, $\vec{r}_i$ - vektor položaja uočenog delića tela, u odnosu na nepokretnu tačku, a $\vec{\omega}_0$ - jedinični vektor trenutne ose obrtanja *Op*. Kinetička energija delića tela je $\Delta E_{K_i} = \frac{1}{2}\omega^2 (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_i)^2 \Delta m_i$. Uvođenjem oznake $(\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_i)^2 = d_{p_i}^2$, gde je d_{p_i} - rastojanje delića od trenutne ose obrtanja, uzimajući da $N \to \infty$, dobija se

$$E_K = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta E_{K_i} = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\omega^2 d_{p_i}^2 \Delta m_i = \frac{1}{2}\omega^2 \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} d_{p_i}^2 \Delta m_i = \frac{1}{2}\omega^2 \int_V d^2 dm = \frac{1}{2} J_{O_p} \omega^2$$

gde je J_{O_p} - promenljivi moment inercije tela u odnosu na trenutnu osu obrtanja *Op*.

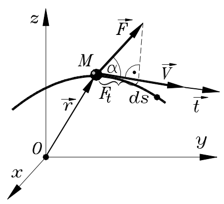
Kinetička energija tela koje vrši opšte kretanje

Opšte kretanje tela može se razložiti na prenosno translatorno i relativno kretanje koje predstavlja obrtanje oko trenutne ose obrtanja. Koristeći Kenigovu teoremu, tj. da je kinetička energija $E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + E_{K_{rel}}$, i uzimajući u obzir da je relativno kretanje obrtanje oko nepokretne tačke, pri čemu je u tom slučaju izraz za kinetičku energiju $E_K = \frac{1}{2} J_{C_p} \omega^2$, tada je kinetička energija tela koje vrši opšte kretanje

$$E_K = \frac{1}{2} m V_C^2 + \frac{1}{2} J_{C_p} \omega^2 .$$

Elementarni rad sile

Neka se tačka *M* kreće pod dejstvom sile $\vec{F}$ po putanji proizvoljnog oblika. Rad sile $\vec{F}$ na elementarnom pomeranju $d\vec{r}$ tačke ili elementarni rad sile δA jednak je skalarnom proizvodu sile $\vec{F}$ i elementarne (beskonačno male) promene vektora položaja te tačke, tj.



$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}\ ,\ \delta A = \vec{F} \cdot \vec{V}\, dt\ ,\ \delta A = \vec{V} \cdot d\vec{I}\ ,$$

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds} ds = \vec{t}\, ds\ ,\ \delta A = \vec{F} \cdot \vec{t}\, ds .$$

Iz prethodnih razmatranja vidi se da je

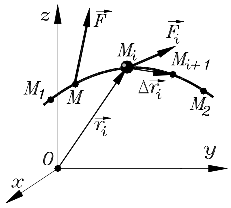
$$\delta A \begin{cases} > 0, & 0 \le \alpha \le 90^o \\ = 0, & \alpha = 90^o \\ < 0, & 90^o < \alpha \le 180^o. \end{cases}$$

Ako se $\vec{F}$ i $d\vec{r}$ izraze u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem *Oxyz* $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$, tada je elementarni rad sile

$$\delta A = Xdx + Ydy + Zdz .$$

Rad sile

Ukupni rad sile, ili samo rad sile, koja deluje na tačku, predstavlja rad sile pri konačnom pomeranju tačke po putanji. U cilju određivanja rada sile posmatra se kretanje tačke *M* pod dejstvom sile $\vec{F}$, po putanji proizvoljnog oblika. Ako se deo putanje tačke između dva njena proizvoljna položaja M_1 i M_2 izdeli se na *n* delova,



dobija se poligonalna linija. Analogno definiciji elementarnog rada sile može se uvesti mera dejstva sile $\vec{F}_i$, pri malom konačnom pomeranju tačke iz položaja M_i u položaj M_{i+1}, koja je određena sa $\vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, $\quad (i = 1,2,...,n)$, gde je $\vec{F}_i$ - sila koja deluje na tačku *M* kada se ona nađe u položaju M_i i gde je $\Delta\vec{r}_i$ - priraštaj vektora položaja $\vec{r}$ tačke između njenih položaja M_i i M_{i+1}. Ukupna mera dejstva sile $\vec{F}$, pri pomeranju tačke *M* iz položaja M_1 u položaj M_2, duž poligonalne linije, je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$. Graničnim prelazom, tj. $n \to \infty$ dolazi se do $A_{M_1M_2} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$, koja predstavlja rad sile $\vec{F}$, na njenoj putanji između tačaka M_1 i M_2. Ova granična vrednost naziva se krivolinijski integral. Dakle, rad sile $\vec{F}$ obeležava se sa *A* ili $A_{M_1M_2}$ i određen je sa $A = A_{M_1M_2} = \int\limits_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Ako je za izračunavanje rada sile izabran Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*, tada je

$$A = \int\limits_{M_1}^{M_2} \left(Xdx + Ydy + Zdz \right), \quad A = \int\limits_{t_1}^{t_2} \left(X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z} \right) dt \,.$$

U opštem slučaju rešenje prethodnih krivolinijskih integrala zavisi i od oblika putanje i od dužine luka po kome se kreće tačka. Samo u posebnom slučaju rad sile ne zavisi ni od oblika putanje tačke, niti od njenog pređenog puta, već samo od koordinata početnog i krajnjeg položaja tačke. Da bi to bilo ispunjeno, linearni diferencijalni izraz $Xdx + Ydy + Zdz$ mora da bude totalni diferencijal neke skalarne funkcije položaja tačke $f(x,y,z)$, što znači da se *X, Y* i *Z* mogu predstaviti kao parcijalni izvodi te funkcije. Sile koje ispunjavaju te uslove zovu se konzervativne i rad takvih sila zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tačke na putanji. Svaka sila koja je funkcija položaja ne mora da ispunjava te zahteve koji se nazivaju uslovi konzervativnosti.

Snaga sile

Snaga sile je veličina koja karakteriše promenu po vremenu rada sile. U cilju definisanja snage sile posmatra se tačka na koju deluje sila $\vec{F}$, koja izvrši rad ΔA za konačan interval vremena Δt, pri pomeranju tačke iz položaja M_1, u kome se nalazila u trenutku t_1 u položaj M_2 koji odgovara trenutku t_2. Srednja snaga te sile, za posmatrani interval vremena, određena je sa $P_{sr} = \dfrac{\Delta A}{\Delta t}$. Snaga sile $\vec{F}$, u trenutku *t*, predstavlja graničnu vrednost srednje snage sile kada posmatrani interval vremena teži nuli, tj. $P = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta t} = \dfrac{\delta A}{dt}$. Dakle, snaga sile u datom trenutku jednaka je odnosu elementarnog rada sile i intervala vremena u kome je taj rad izvršen i predstavlja brzinu vršenja rada u tom trenutku.