# Dinamika krutog tela

## Diferencijalne jednačine kretanja krutog tela

Slobodno telo ima šest stepeni slobode: tri koordinate pola translacije i tri Ojlerova ugla. U dinamici tela pogodno je da se za pol translacije uzeti centar masa *C*. Za rešavanje osnovnih zadataka dinamike potrebno je napisati šest jednačina koje povezuju nezavisne parametre i sile koje deluju na telo. Te jednačine su

$$\dot{\vec{K}} = m\dot{\vec{V}}_C = \vec{F}_R^s, \quad m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s. \qquad \text{(A)}$$

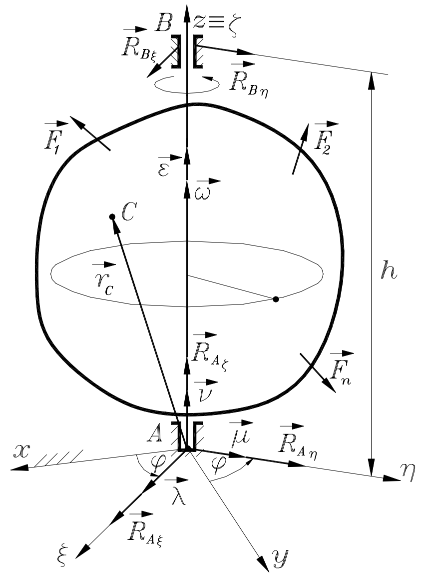
## Diferencijalne jednačine translatornog kretanja tela

Ako se u tački *O* tela ($\overrightarrow{OC} = \vec{r}_C$), koje se kreće translatorno, postavi Dekartov koordinatni sistem *Oxyz*, koristeći diferencijalnu jednačinu kretanja središta masa, dobija se

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad m\ddot{z}_C = Z_R^s.$$

Kako kod translatornog kretanja tela važi da je: $\vec{\omega} = 0$, $\dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s$, i kako je $L_{Cz} = J_{Cz}\omega_z$, sledi da je $\vec{M}_C^s = 0$. Na osnovu toga je $M_{Cx}^s = 0$, $M_{Cy}^s = 0$ i $M_{Cz}^s = 0$. Ove jednačine nazivaju se uslovima kompatibilnosti i služe da se odrede nepoznate sile koje deluju na telo, da bi kretanje bilo translatorno.

## Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose




Telo koje se obrće oko nepokretne ose ima jedan stepen slobode i njegov položaj određen je uglom obrtanja $\varphi$. Diferencijalne jednačine kretanja tela su $m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s$ i $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}_A^s$. Ove jednačine pogodno je projektovati na ose pokretnog koordinatnog sistema $A\xi\eta\zeta$, jer se položaj centra masa i vrednosti momenata inercije tela, ne menjaju. Neka na telo deluje sistem od *n* aktivnih sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ i reakcije veza

$$\vec{R}_A = R_{A\xi}\vec{\lambda} + R_{A\eta}\vec{\mu} + R_{A\zeta}\vec{\nu} \text{ i } \vec{R}_B = R_{B\xi}\vec{\lambda} + R_{B\eta}\vec{\mu}.$$

Izvod vektora, koji je određen u odnosu na ose pokretnog trijedra, ima dva člana, relativni (lokalni) i prenosni, pa je

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \frac{d_r\vec{K}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{K}, \quad \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L}_A.$$

Sada vektorske diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose postaju

$$\frac{d_r\vec{K}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{K} = \vec{F}_R^a + \vec{R}_A + \vec{R}_B, \quad \frac{d_r\vec{L}_A}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L}_A = \vec{M}_A^a + \vec{M}_A\left(\vec{R}_A\right) + \vec{M}_A\left(\vec{R}_B\right).$$

Polazeći od

$$\vec{K} = K_\xi\vec{\lambda} + K_\eta\vec{\mu} + K_\zeta\vec{\nu}, \quad \frac{d_r\vec{K}}{dt} = \frac{dK_\xi}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dK_\eta}{dt}\vec{\mu} + \frac{dK_\zeta}{dt}\vec{\nu},$$

$$\vec{K} = m\vec{V}_C = m\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_C\right) = m\begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ 0 & 0 & \omega_z \\ \xi_C & \eta_C & \zeta_C \end{vmatrix} = -m\omega_z\eta_C\vec{\lambda} + m\omega_z\xi_C\vec{\mu},$$

dobija se da je $\frac{d_r\vec{K}}{dt} = -m\varepsilon_z\eta_C\vec{\lambda} + m\varepsilon_z\xi_C\vec{\mu}$, jer je $\dot{\xi}_C = \dot{\eta}_C = 0$. Drugi član je

$$\vec{\omega}\times\vec{K} = \omega_z\vec{\nu}\times\vec{K} = \omega_z\vec{\nu}\times m(\vec{\omega}\times\vec{r}_C) = m\omega_z\vec{\nu}\times\left(-\omega_z\eta_C\vec{\lambda} + \omega_z\xi_C\vec{\mu}\right) = m\omega_z^2\begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu}\\ 0 & 0 & 1\\ -\eta_C & \xi_C & 0\end{vmatrix}$$

$$\vec{\omega}\times\vec{K} = -m\omega_z^2\xi_C\vec{\lambda} - m\omega_z^2\eta_C\vec{\mu}\,.$$

Koristeći definiciju momenta količine kretanja, za kruto telo koje se obrće oko nepokretne ose je

$$\vec{L}_A = \int_V \left(\vec{r}\times\vec{V}\right)dm = \int_V \left(\vec{r}\times\vec{\omega}\times\vec{r}\right)dm = \vec{\omega}\int_V \left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)dm - \int_V \vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)dm$$

$$\vec{L}_A = \omega_z\vec{\nu}\int_V\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2\right)dm - \omega_z\int_V\left(\xi\zeta\vec{\lambda} + \eta\zeta\vec{\mu} + \zeta^2\vec{\nu}\right)dm\,,$$

$$L_{A\xi} = -\omega_z\int_V \xi\zeta dm = -\omega_z J_{\xi\zeta}\,,\ L_{A\eta} = -\omega_z\int_V \eta\zeta dm = -\omega_z J_{\eta\zeta}\,,$$

$$L_{A\zeta} = \omega_z\int_V\left(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-\zeta^2\right)dm = \omega_z J_{\zeta}\,,$$

pa su lokalni izvodi

$$\dot{L}_{A\xi} = -\varepsilon_z J_{\xi\zeta}\,,\quad \dot{L}_{A\eta} = -\varepsilon_z J_{\eta\zeta}\,,\quad \dot{L}_{A\zeta} = \varepsilon_z J_{\zeta}\,,$$

i

$$\vec{\omega}\times\vec{L}_A = \begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu}\\ 0 & 0 & \omega_z\\ -\omega_z J_{\xi\zeta} & -\omega_z J_{\eta\zeta} & \omega_z J_{\zeta}\end{vmatrix} = \omega_z^2 J_{\eta\zeta}\vec{\lambda} - \omega_z^2 J_{\xi\zeta}\vec{\mu}\,.$$

Momenti reakcija veza, za tačku $A$, su

$$\vec{M}_A\left(\vec{R}_A\right) = 0\,,\ \vec{M}_A\left(\vec{R}_B\right) = \vec{r}_B\times\vec{R}_B = \begin{vmatrix}\vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu}\\ 0 & 0 & h\\ R_{B\xi} & R_{B\eta} & 0\end{vmatrix} = -hR_{B\eta}\vec{\lambda} + hR_{B\xi}\vec{\mu}\,.$$

Kako je $\vec{\omega} = \omega_z\vec{\nu} = \dot{\varphi}\vec{\nu}$, i $\vec{\varepsilon} = \varepsilon_z\vec{\nu} = \ddot{\varphi}\vec{\nu}$, skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose su

$$\begin{aligned}
-m\ddot{\varphi}\eta_C - m\dot{\varphi}^2\xi_C &= F^a_{R\xi} + R_{A\xi} + R_{B\xi}\,,\\
m\ddot{\varphi}\xi_C - m\dot{\varphi}^2\eta_C &= F^a_{R\eta} + R_{A\eta} + R_{B\eta}\,,\\
0 &= F^a_{R\zeta} + R_{A\zeta}\,,\\
-\ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= M^a_{A\xi} - hR_{B\eta}\,,\\
-\ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} &= M^a_{A\eta} + hR_{B\xi}\,,\\
J_{\zeta}\ddot{\varphi} &= M^a_{A\zeta}\,.
\end{aligned}\qquad \text{(B)}$$

Koristeći jednačine (A) ($m\vec{a}_C = \vec{F}^s_R$, $\dot{\vec{L}}_A = \vec{M}^s_A$), kao i jednačine koje izražavaju Dalamberov princip za materijalni sistem ($\vec{F}^s_R + \vec{F}^{in}_R = 0$, $\vec{M}^s_A + \vec{M}^{in}_A = 0$), skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose mogu se napisati u obliku

$$
\begin{aligned}
F^a_{R\xi} + R_{A\xi} + R_{B\xi} + F^{in}_{R\xi} &= 0,\\
F^a_{R\eta} + R_{A\eta} + R_{B\eta} + F^{in}_{R\eta} &= 0,\\
F^a_{R\zeta} + R_{A\zeta} + F^{in}_{R\zeta} &= 0,\\
M^a_{A\xi} - hR_{B\eta} + M^{in}_{R\xi} &= 0,\\
M^a_{A\eta} + hR_{B\xi} + M^{in}_{R\eta} &= 0,\\
M^a_{A\zeta} + M^{in}_{R\zeta} &= 0.
\end{aligned}
\qquad \text{(C)}
$$

Poređenjem jednačina (B) i (C), projekcije glavnog vektora i glavnog momenta sila inercije, tela koje se obrće oko nepokretne ose, na ose pokretnog koordinatnog sistema su

$$
F^{in}_{R\xi} = m\ddot{\varphi}\eta_C + m\dot{\varphi}^2\xi_C\,,\quad F^{in}_{R\eta} = -m\ddot{\varphi}\xi_C + m\dot{\varphi}^2\eta_C\,,\quad F^{in}_{R\zeta} = 0\,,
$$
$$
M^{in}_{A\xi} = \ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta}\,,\quad M^{in}_{A\eta} = \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta}\,,\quad M^{in}_{A\zeta} = -J_{\zeta}\ddot{\varphi}\,.
$$

**Određivanje reakcija u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose**

Reakcije u ležištima tela koje se obrće oko nepokretne ose, koje su određene iz prvih pet jednačina u (B) i (C), mogu se prikazati i na sledeći način

$$
\vec{R}_A = \vec{R}^{st}_A + \vec{R}^d_A\,,\quad \vec{R}_B = \vec{R}^{st}_B + \vec{R}^d_B\,,
$$
$$
R_{A\xi} = R^{st}_{A\xi} + R^d_{A\xi}\,,\; R_{A\eta} = R^{st}_{A\eta} + R^d_{A\eta}\,,\; R_{A\zeta} = R^{st}_{A\zeta} + R^d_{A\zeta}\,,
$$
$$
R_{B\xi} = R^{st}_{B\xi} + R^d_{B\xi}\,,\; R_{B\eta} = R^{st}_{B\eta} + R^d_{B\eta}\,.
$$

Statičke reakcije bi se pojavile i onda kada veze ne dozvoljavaju obrtanje, a dinamičke reakcije su posledica obrtanja tela. Jednačine pomoću kojih se mogu odrediti statičke i dinamičke reakcije veza su

$$
\begin{aligned}
F^a_{R\xi} + R^{st}_{A\xi} + R^{st}_{B\xi} &= 0, & R^d_{A\xi} + R^d_{B\xi} + m\ddot{\varphi}\eta_C + m\dot{\varphi}^2\xi_C &= 0,\\
F^a_{R\eta} + R^{st}_{A\eta} + R^{st}_{B\eta} &= 0, & R^d_{A\eta} + R^d_{B\eta} - m\ddot{\varphi}\xi_C + m\dot{\varphi}^2\eta_C &= 0,\\
F^a_{R\zeta} + R^{st}_{A\zeta} &= 0, & R^d_{A\zeta} &= 0,\\
M^a_{A\xi} - hR^{st}_{B\eta} &= 0, & -hR^d_{B\eta} + \ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= 0,\\
M^a_{A\eta} + hR^{st}_{B\xi} &= 0. & hR^d_{B\xi} + \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} &= 0.
\end{aligned}
$$

**Oslovi dinamičke uravnoteženosti tela koje se obrće oko nepokretne ose**

Telo koje se obrće oko nepokretne ose biće dinamički uravnoteženo ako su dinamičke reakcije veza jednake nuli, tj.

$$
R^d_{A\xi} = R^d_{A\eta} = R^d_{B\xi} = R^d_{B\eta} = 0\,.
$$

Koristeći prethodne jednačine, dobijaju se dva para linearnih homogenih algebarskih jednačina

$$
\begin{aligned}
\ddot{\varphi}\eta_C + \dot{\varphi}^2\xi_C &= 0, & \ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} - \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= 0, & \dot{\varphi}^2\xi_C + \ddot{\varphi}\eta_C &= 0, & \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} + \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} &= 0,\\
-\ddot{\varphi}\xi_C + \dot{\varphi}^2\eta_C &= 0, & \ddot{\varphi}J_{\eta\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\xi\zeta} &= 0, & -\ddot{\varphi}\xi_C + \dot{\varphi}^2\eta_C &= 0, & -\ddot{\varphi}J_{\xi\zeta} + \dot{\varphi}^2 J_{\eta\zeta} &= 0,
\end{aligned}
$$

gde su nepoznate $\xi_C$, $\eta_C$, $J_{\xi\zeta}$ i $J_{\eta\zeta}$. Determinanta oba sistema jednačina je

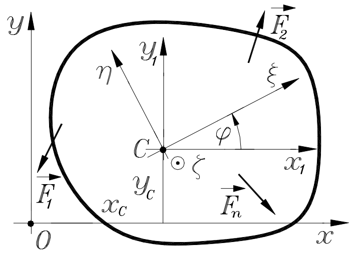
$$
\begin{vmatrix} \dot{\varphi}^2 & \ddot{\varphi} \\ -\ddot{\varphi} & \dot{\varphi}^2 \end{vmatrix} = \dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2 \neq 0\,,
$$

pa sistemi jednačina nemaju drugih rešenja, osim trivijalnog, tj.

$$
\xi_C = \eta_C = 0 \qquad J_{\xi\zeta} = J_{\eta\zeta} = 0\,.
$$

To znači, da bi telo koje se obrće oko nepokretne ose bilo dinamički uravnoteženo, treba da se centar masa tela nalazi na osi obrtanja i da osa obrtanja bude glavna osa inercije, pa odatle sledi da ta osa treba da bude glavna centralna osa. Praktična realizacija dinamičke uravnoteženosti postiže se dodavanjem ili oduzimanjem masa.

**Diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela**




Telo koje vrši ravno kretanje ima tri stepena slobode. Razlažući ravno kretanje na translatorno i obrtno, može se reći da se ovo kretanje sastoji od translatornog sa polom translacije u centru masa *C* i obrtnog kretanja oko ose koja prolazi kroz pol *C*, a upravna je na ravnu figuru. Koristeći osnovne jednačine kretanja tela

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s,$$

skalarne diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela su

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad J_{C\zeta}\ddot{\varphi} = M_{C\zeta}^s,$$

koje omogućavaju rešavanje oba zadatka dinamike.
U nekim slučajevima, kada je poznata putanja centra masa *C*, pogodno je koristiti ose prirodnog trijedra. Tada su skalarne diferencijalne jednačine ravnog kretanja tela date sa

$$m\frac{dV_C}{dt} = F_{Rt}^s, \quad m\frac{V_C^2}{R_K} = F_{Rn}^s, \quad J_{C\zeta}\ddot{\varphi} = M_{C\zeta}^s.$$

**Diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke**

Neka se telo obrće oko nepokretne tačke *O*. U ovom slučaju, diferencijalne jednačine dobijaju se primenom teoreme o promeni momenta količine kretanja za nepokretni pol. Zakon o kretanju centra masa ovde se može iskoristiti za određivanje reakcija veza u nepokretnom polu. Diferencijalna jednačina je

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^s.$$

Za dobijanje skalarnih diferencijalnih jednačina najpogodnije je koristiti pokretni koordinatni sistem $O\xi\eta\zeta$, kruto vezan za telo, jer se za te ose ne menjaju momenti inercije tela. U tom slučaju je

$$\vec{L}_O = L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu},$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + L_{O\xi}\dot{\vec{\lambda}} + L_{O\eta}\dot{\vec{\mu}} + L_{O\zeta}\dot{\vec{\nu}}$$

$$\dot{\vec{\lambda}} = \vec{\omega}\times\vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{\mu}} = \vec{\omega}\times\vec{\mu}, \quad \dot{\vec{\nu}} = \omega\times\vec{\nu},$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + L_{O\xi}\left(\vec{\omega}\times\vec{\lambda}\right) + L_{O\eta}\left(\vec{\omega}\times\vec{\mu}\right) + L_{O\zeta}\left(\vec{\omega}\times\vec{\nu}\right),$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \left(\vec{\omega}\times L_{O\xi}\vec{\lambda}\right) + \left(\vec{\omega}\times L_{O\eta}\vec{\mu}\right) + \left(\vec{\omega}\times L_{O\zeta}\vec{\nu}\right),$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \vec{\omega}\times\left(L_{O\xi}\vec{\lambda} + L_{O\eta}\vec{\mu} + L_{O\zeta}\vec{\nu}\right),$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \vec{\omega}\times\vec{L}_O,$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} + \begin{vmatrix} \vec{\lambda} & \vec{\mu} & \vec{\nu} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ L_{O\xi} & L_{O\eta} & L_{O\zeta} \end{vmatrix},$$

$$\dot{\vec{L}}_O = \frac{dL_{O\xi}}{dt}\vec{\lambda} + \frac{dL_{O\eta}}{dt}\vec{\mu} + \frac{dL_{O\zeta}}{dt}\vec{\nu} +$$
$$\vec{\lambda}\left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right) + \vec{\mu}\left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right) + \vec{\nu}\left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right),$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left[\frac{dL_{O\xi}}{dt} + \left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right)\right]\vec{\lambda} + \left[\frac{dL_{O\eta}}{dt} + \left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right)\right]\vec{\mu} +$$
$$+\left[\frac{dL_{O\zeta}}{dt} + \left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right)\right]\vec{\nu} = \vec{M}_O^s.$$

Odavde sledi

$$\frac{dL_{O\xi}}{dt} + \left(\omega_\eta L_{O\zeta} - \omega_\zeta L_{O\eta}\right) = M_{O\xi}^s,$$
$$\frac{dL_{O\eta}}{dt} + \left(\omega_\zeta L_{O\xi} - \omega_\xi L_{O\zeta}\right) = M_{O\mu}^s,$$
$$\frac{dL_{O\zeta}}{dt} + \left(\omega_\xi L_{O\eta} - \omega_\eta L_{O\xi}\right) = M_{O\zeta}^s.$$

Ako su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ glavne ose inercije tela, skalarne diferencijalne jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke su

$$J_{O\xi}\frac{d\omega_\xi}{dt} + \left(J_{O\zeta} - J_{O\eta}\right)\omega_\eta\omega_\zeta = M_{O\xi}^s,$$
$$J_{O\eta}\frac{d\omega_\eta}{dt} + \left(J_{O\xi} - J_{O\zeta}\right)\omega_\xi\omega_\zeta = M_{O\eta}^s,$$
$$J_{O\zeta}\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \left(J_{O\eta} - J_{O\xi}\right)\omega_\eta\omega_\xi = M_{O\zeta}^s,$$

koje se nazivaju Ojlerove dinamičke jednačine obrtanja tela oko nepokretne tačke. One predstavljaju sistem od tri nelinearne spregnute jednačine po $\omega_\xi$, $\omega_\eta$ i $\omega_\zeta$. Ukoliko je moguće rešiti prethodni sistem jednačina i odrediti

$$\omega_\xi = \omega_\xi(t), \quad \omega_\eta = \omega_\eta(t), \quad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t),$$

tada se korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

u nekim slučajevima, uz zadate početne uslove kretanja, mogu odrediti konačne jednačine obrtanja tela oko nepokretne ose

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t).$$

Ovde je razmatran opšti slučaj delovanja spoljašnjih sila. U tom slučaju ne postoje opšti integrali prethodnih diferencijalnih jednačina. Ako je telo teško i težina tela jedina aktivna sila postoje Ojlerov, Lagranžev i slučaj Kovalevske, u kojima se mogu odrediti rešenja diferencijalnih jednačina obrtanja tela oko nepokretne tačke.

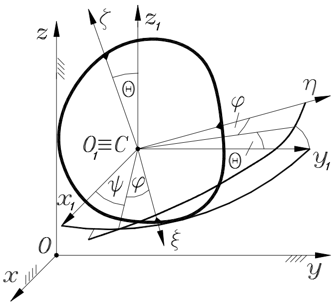
**Diferencijalne jednačine opšteg kretanja tela**

Koristeći osnovne jednačine kretanja tela

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_R^s, \quad \dot{\vec{L}}_C = \vec{M}_C^s$$

prve tri skalarne diferencijalne jednačine kretanja tela su

$$m\ddot{x}_C = X_R^s, \quad m\ddot{y}_C = Y_R^s, \quad m\ddot{z}_C = Z_R^s,$$




a ako su ose $O\xi$, $O\eta$ i $O\zeta$ glavne ose inercije tela, slede tri Ojlerove jednačine

$$J_{O\xi}\frac{d\omega_\xi}{dt} + \left(J_{O\zeta} - J_{O\eta}\right)\omega_\eta\omega_\zeta = M_{O\xi}^s,$$

$$J_{O\eta}\frac{d\omega_\eta}{dt} + \left(J_{O\xi} - J_{O\zeta}\right)\omega_\xi\omega_\zeta = M_{O\eta}^s,$$

$$J_{O\zeta}\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \left(J_{O\eta} - J_{O\xi}\right)\omega_\eta\omega_\xi = M_{O\zeta}^s,$$

Ove jednačine predstavljaju sistem od šest diferencijalnih jednačina koje opisuju opšte kretanje tela. Prvim integraljenjem ovog sistema jednačina dobija se

$$x_C = x_C(t), \qquad \omega_\xi = \omega_\xi(t),$$
$$y_C = y_C(t), \qquad \omega_\eta = \omega_\eta(t),$$
$$z_C = z_C(t), \qquad \omega_\zeta = \omega_\zeta(t).$$

Korišćenjem Ojlerovih kinematičkih jednačina

$$\omega_\xi = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

mogu se (u nekim sličajevima) dobiti rešenja

$$x_C = x_C(t), \qquad \psi = \psi(t),$$
$$y_C = y_C(t), \qquad \theta = \theta(t),$$
$$z_C = z_C(t), \qquad \varphi = \varphi(t).$$