Elementi analitičke mehanike

Generalisane koordinate

Ako se posmatra sistem od n materijalnih tačaka, čiji položaj je određen sa 3n Dekartovih koordinata x_i, y_i i z_i (i=1,2,...,n) i ako na sistem deluje k holonomnih, nestacionarnih, zadržavajućih veza $f_\alpha(x_i, y_i, z_i, t) = 0$, ($\alpha$ =1,2,...,k), tada je položaj sistema određen sa $s = 3n - k$ nezavisnih koordinata. Nezavisni parametri koji u potpunosti određuju položaj materijalnog sistema u prostoru nazivaju se generalisane koordinate, a njihov broj jednak je broju stepeni slobode sistema. Generalisane koordinate obeležavaju se sa q_j (j=1,2,...,s). Njihove dimenzije mogu biti različite: dužina, ugao, površina,... Postoje jednoznačne veze između generalisanih koordinata i nekih drugih, npr. Dekartovih: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s, t) = \vec{r}_i(q_j, t)$ (i=1,2,...,n) (j=1,2,...,s), tj. $x_i = x_i(q_j, t)$, $y_i = y_i(q_j, t)$, $z_i = z_i(q_j, t)$. Zamenom prethodnih jednačina u jednačine veza moraju se dobiti identiteti, tj. $f_\alpha(x_i(q_j,t), y_i(q_j,t), z_i(q_j,t), t) \equiv 0$, ($\alpha$ =1,2,...,k). Ukoliko se ne bi dobili identiteti, to bi značilo da generalisane koordinate - q_j (j=1,2,...,s) nisu međusobno nezavisne.

Generalisane brzine

Pod konfiguracijom materijalnog sistema podrazumeva se ukupnost položaja i oblika koje materijalni sistem zauzima u prostoru tokom kretanja. Neka je konfiguracija materijalnog sistema određena generalisanim koordinatama q_j (j=1,2,...,s). Kretanje tog sistema određeno je jednačinama kretanja $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$,..., $q_s = q_s(t)$. Pod generalisanom brzinom podrazumeva se izvod generalisane koordinate po vremenu, tj. $\dot{q}_j = \dfrac{dq_j}{dt}$.

Ako je materijalni sistem izložen dejstvu holonomnih nestacionarnih veza, tada je brzina i-te tačke određena sa

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t},$$

a odgovarajuće projekcije na ose Dekartovog sistema su npr. $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{s}\dfrac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \dfrac{\partial x_i}{\partial t}$. U slučaju holonomnih stacionarnih veza izraz za brzinu tačke je $\vec{V}_i = \sum_{j=1}^{s}\dfrac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j$. Izvod brzine, po generalisanoj brzini, na osnovu prethodnih izraza, jednak je izvodu vektora položaja po generalisanoj koordinati, tj.

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}.$$

Izvod brzine $\vec{V}_i$ po generalisanoj koordinati q_j je

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j}.$$

Sa druge strane, parcijalni izvod $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ zavisi od generalisanih koordinata i vremena, tj.

$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \vec{f}_i(q_1, q_2, ..., q_s, t)$, tako da sledi

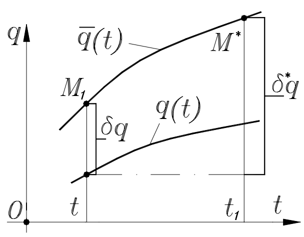
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_1 \partial q_j}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_2 \partial q_j}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_s \partial q_j}\dot{q}_s + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial t \partial q_j},$$

odakle sledi zaključak o komutativnosti operatora $\frac{d}{dt}$ i $\frac{\partial}{\partial q_j}$, tj.

$$\frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right).$$

Varijacija koordinata

Neka je data funkcija $q = q(t)$. Ako se formira funkcija $\overline{q}(t) = q(t) + \varepsilon\eta(t)$, gde je ε - proizvoljno mala veličina, a $\eta(t)$ diferencijabilna funkcija, tada razlika $\overline{q}(t) - q(t)$ predstavlja promenu oblika funkcije $q(t)$ nezavisnu od vremena i naziva se varijacija funkcije $q(t)$, označava se sa δq, tj.



$$\delta q = \overline{q}(t) - q(t) = \varepsilon\eta(t).$$

Iz prethodne definicije uočava se da se vreme ne menja, tj. $\delta t = 0$, zbog čega se ove varijacije nazivaju izohrone (sinhrone). Na osnovu prethodnog sledi da je $\delta\dot{q} = \dot{\overline{q}}(t) - \dot{q}(t)$. Imajući u vidu da je $\frac{d}{dt}\delta q = \dot{\overline{q}}(t) - \dot{q}(t)$, sledi zaključak o komutativnosti diferenciranja i variranja, tj.

$$\delta\left(\frac{dq}{dt}\right) = \delta\dot{q} = \frac{d}{dt}(\delta q).$$

Ako se pri promeni funkcije $q(t)$ vrši i promena argumenta *t* funkcije, takva varijacija se naziva ukupna ili asinhrona i označava se sa $\delta^* q$. Kada se nezavisno promenljiva *t* promeni za δt, funkcija $q(t)$ dobija priraštaj $\dot{q}\,\delta t$, a ukupna varijacija je tada

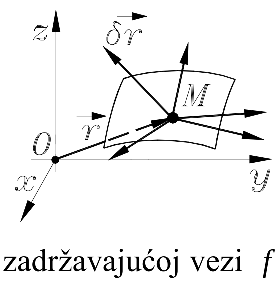
$$\delta^* q = \delta q + \dot{q}\,\delta t,$$

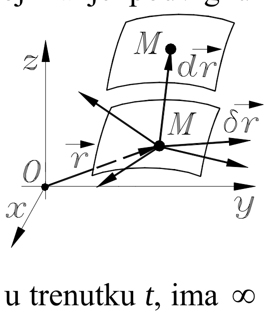
i za nju ne važi komutativnost variranja i diferenciranja

$$\delta^*\left(\frac{dq}{dt}\right) \neq \frac{d}{dt}(\delta^* q).$$

Virtualna pomeranja holonomnog sistema

Stvarno pomeranje materijalnog sistema predstavlja promenu koordinata sistema po stvarnim putanjama zavisno od dejstva aktivnih sila i veza kojima je podvrgnut sistem. Ova pomeranja određena su diferencijalima koordinata $d\vec{r}_i$. Moguće ili virtualno pomeranje materijalnog sistema je svako zamišljeno beskonačno malo pomeranje njegovih tačaka, koje u datom trenutku dopuštaju veze. Ako se tačka kreće po holonomnoj, stacionarnoj, zadržavajućoj vezi $f(x, y, z) = 0$, virtualnih pomeranja $\delta\vec{r}$ tačke, u trenutku *t*, ima ∞ mnogo i sva ta pomeranja pripadaju tangetnoj ravni na tu površ. Samo jedno od njih





će biti i stvarno pomeranje $d\vec{r}$. Ako se tačka kreće po holonomnoj, nestacionarnoj, zadržavajućoj vezi $f(x,y,z,t)=0$, virtualno pomeranje $\delta\vec{r}$, koje se određuje pri zaustavljanju vremena, i dalje pripada tangencijalnoj ravni, a stvarno pomeranje $d\vec{r}$ ne poklapa se ni sa jednim od virtualnih pomeranja $\delta\vec{r}$. Ako je kretanje tačke zadato u vektorskom obliku $\vec{r}=\vec{r}(t)$, tada pri stvarnom pomeranju tačke, vektor pomeranja $d\vec{r}$ je diferencijal funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)$, tj. $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$. Varijacija pomeranja $\delta\vec{r}$ je varijacija funkcije $\vec{r}=\vec{r}(t)$, tj. elementarna promena oblika funkcije pri konstantnoj vrednosti argumenta *t*. Analogno sa prehodnim je $\delta\vec{r}=\delta x\,\vec{i}+\delta y\,\vec{j}+\delta z\,\vec{k}$.
Neka se tačka M u nekom trenutku t nalazi u položaju $M(x,y,z)$, na vezi $f(x,y,z)=0$. Ako se tački zada virtualno pomeranje tada će se ona naći u položaju $\overline{M}(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$ na vezi, tj. $f(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)=0$. Razvijanjem ove funkcije u Tejlorov red i zadržavajući se na linearnim članovima varijacija, dobija se

$$f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0,\quad grad f\cdot\delta\vec{r}=0.$$

Za istu vezu, i stvarno pomeranje, je

$$f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,\quad grad f\cdot d\vec{r}=0.$$

Ponavljajući prethodni postupak za nestacionarnu vezu $f(x,y,z,t)=0$, dobija se $\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\delta z=0$ i $grad f\cdot\delta\vec{r}=0$, tj. nestacionarnost veze ne utiče na uslove koji moraju da zadovolje varijacije. Za slučaj stvarnog pomeranja, koordinate tačke moraju da zadovolje relaciju $f(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt)=0$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\frac{\partial f}{\partial t}dt=0,\quad grad f\cdot d\vec{r}=-\frac{\partial f}{\partial t}dt,$$

odakle se zaključuje da stvarno pomeranje $d\vec{r}$ nije u tangencijalnoj ravni i ne poklapa se sa virtualnim pomeranjima.
Virtualno pomeranje materijalnog sistema može biti izraženo i preko generalisanih koordinata. U tom slučaju, vektor položaja *i*-te materijalne tačke sistema je $\vec{r}_i=\vec{r}_i(q_1,q_2,...,q_s,t)=\vec{r}_i(q_j,t)$ (i=1,2,...,n) (j=1,2,...,s). Tada je

$$d\vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}dq_2+\cdots+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}dq_s+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial t}dt,\ \delta\vec{r}_i=\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_1}\delta q_1+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_2}\delta q_2+\cdots+\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_s}\delta q_s,$$

$$\delta\vec{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j,$$

a odgovarajuće projekcije na ose npr. Dekartovog sistema su

$$\delta x_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\delta q_j,\quad \delta y_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial y_i}{\partial q_j}\delta q_j,\quad \delta z_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial z_i}{\partial q_j}\delta q_j.$$

Rad sila na virtualnom pomeranju sistema

Neka je $\vec{F}_i$ rezultanta svih sila koje deluju na *i*-tu tačku materijalnog sistema. Rad te sile na virtualnom pomeranju $\delta\vec{r}_i$ tačke u određenom položaju sistema, koji zauzima u posmatranom trenutku, je

$$\delta A_i=\vec{F}_i\cdot\delta\vec{r}_i.$$

Rad svih sila, koje deluju na *n* tačaka materijalnog sistema, na virtualnom pomeranju sistema je

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \ .$$

Idealne veze

Veze kod kojih je zbira radova reakcija veza na virtualnom pomeranju jednak nuli, nazivaju se idealne veze. Ako su $\vec{F}_{N_i}$ reakcije veza koje deluju na *i*-tu tačku sistema, a $\delta \vec{r}_i$ odgovarajuća virtualna pomeranja, tada važi

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{N_i} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \, .$$

Ako se tačka nalazi na realnoj vezi tada je ukupna reakcija veze $\vec{F}_W = \vec{F}_N + \vec{F}_\mu$, pa je

$$\delta A_i = \vec{F}_W \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_N \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{F}_\mu \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_\mu \cdot \delta \vec{r}_i \, .$$

Generalisane sile

Posmatra se materijalni sistem od n tačaka koji je podvrgnut dejstvu k idealnih, stacionarnih, holonomnih, zadržavajućih veza. Ovaj sistem ima $s = 3n - k$ stepeni slobode. Rad sila na virtualnom pomeranju, korišćenjem izraza $\delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$, je

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} \delta A_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \, .$$

Uvođenjem oznake $Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$, virtualni rad je

$$\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j \, \delta q_j = Q_1 \, \delta q_1 + Q_2 \, \delta q_2 + \cdots + Q_s \, \delta q_s \, ,$$

a koeficijenti Q_j ($j = 1,2,\ldots,s$) uz varijacije generalisanih koordinata nazivaju se generalisane sile. U odnosu na Dekartov koordinatni sistem, izraz kojim se definiše generalisana sila, ima oblik

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right).$$

Generalisane sile moguće je odrediti na više načina.

1. Direktnom primenom izraza $Q_j = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$.

2. Ako se sistemu zadaju takva virtualna pomeranja pri čemu su varijacije svih koordinata, osim jedne, jednake nuli. Neka je npr. $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = \cdots = \delta q_s = 0$. Tada je $\delta A = Q_1 \, \delta q_1$, odakle se dobija generalisana sila Q_1. Na isti način određuju se i ostale generalisane sile.

3. Ako na sistem deluju konzervativne sile tada je izraz za potencijalnu energiju sistema $E_p(x_i, y_i, z_i)$ (i=1,2,...,n), tj. $E_p(q_j) = E_P(q_1, q_2, \ldots, q_s)$. Kako je $\delta A = -\delta E_p$, tada je

$$\delta A = -\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial E_p}{\partial q_j} \delta q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial E_p}{\partial q_2} \delta q_2 - \cdots - \frac{\partial E_p}{\partial q_s} \delta q_s \, ,$$

pa je $Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j}$.

Lagranžev princip virtualnih pomeranja. Opšta jednačina statike
Def. Ako se materijalni sistem, izložen dejstvu idealnih, holonomnih i stacionarnih veza nalazi u ravnoteži, rad svih aktivnih sila na virtualnom pomeranju sistema jednak je nuli, tj. $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0$.
Potrebnost: Neka su sve tačke sistema u ravnoteži. Na *i*-tu tačku sistema deluje aktivna sila $\vec{F}_i^a$ i reakcija idealne veze $\vec{N}_i$, a važi $\vec{F}_i^a + \vec{N}_i = 0$. Rad ovih sila na virtualnom pomeranju je $\vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i + \vec{N}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$. S obzirom prethodna relacija treba da važi za sve tačke sistema, tada je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$. Imajući u vidu da za idealne veze važi da je $\sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, dobija se $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0$.
Dovoljnost: Polazeći od $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, treba pokazati da je ispunjen uslov $\vec{F}_i^a + \vec{N}_i = 0$. Ako se uvede suprotna pretpostavka, tj. da za samo jednu tačku sistema važi $\vec{F}_i^a + \vec{N}_i \neq 0$, pa je tada $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i^a + \vec{N}_i \neq 0$. To znači da će sistem iz stanja mirovanja preći u kretanje. U ovom slučaju veze su stacionarne pa će se stvarno pomeranje poklopiti sa jednim od virtualnih. Zbog kretanja u smeru rezultante sila $\vec{F}_i^a$ i $\vec{N}_i$, ove sile će izvršiti pozitivan rad, tj. $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^a + \vec{N}_i\right)\cdot \delta\vec{r}_i > 0$. Kako su veze idealne, tada je $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i^a \cdot \delta\vec{r}_i > 0$, što je suprotno polaznom uslovu, pa je pretpostavka pogrešna, tj. za svaku tačku sistema mora da važi $\vec{F}_i^a + \vec{N}_i = 0$.
Ovaj princip može se izraziti i u generalisanim koordinatama. S obzirom da za sistem sa *s* stepeni slobode važi $\delta A = \sum_{j=1}^{s} Q_j\, \delta q_j$, onda je uslov ravnoteže $\sum_{j=1}^{s} Q_j^a\, \delta q_j = 0$.
Varijacije generalisanih kordinata δq_j međusobno su nezavisne, pa da bi bila zadovoljena prethodna relacija mora biti $Q_1^a = Q_2^a = \cdots Q_s^a = 0$. Za konzervativni sistem uslovi ravnoteže su $\frac{\partial E_p}{\partial q_1} = \frac{\partial E_p}{\partial q_2} = \cdots = \frac{\partial E_p}{\partial q_s} = 0$. Ovaj princip može se primeniti i kada materijalni sistem čiji je broj stepeni slobode jednak nuli.

Lagranž-Dalamberov princip. Opšta jednačina dinamike
Def. Zbir virtualnih radova svih aktivnih sila koje deluju na mehanički sistem i svih uslovno pridodatih sila inercije jednak je nuli.
Za *i*-tu tačku materijalnog sistema, primenom Dalamberovog principa, važi $\vec{F}_i^a + \vec{N}_i + \vec{F}_i^{in} = 0$. Saopštavajući sistemu virtualno pomeranje i koristeći Lagranžev princip, dobija se

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^a + \vec{N}_i + \vec{F}_i^{in}\right)\cdot \delta\vec{r}_i = 0 .$$

Kako je $\vec{F}_i^{in} = -m_i\vec{a}_i$, a veze idealne, tj. $\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$, tada je $\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{a} - m_i\vec{a}_i\right)\cdot \delta\vec{r}_i = 0$.
Ovaj princip, izražen u Dekartovim koordinatama ima oblik

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(X_i^a - m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i + \left(Y_i^a - m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i + \left(Z_i^a - m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right] = 0,$$

a u generalisanim koordinatama, koristeći $\delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j$, je

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{a} + \vec{F}_i^{in}\right)\cdot\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j = 0, \quad \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{a}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{in}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = 0.$$

Ako se uvedu oznake $Q_j^a = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{a}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$, $Q_j^{in} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{in}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$, tada je $\sum_{j=1}^{s}\left(Q_j^a + Q_j^{in}\right)\delta q_j = 0$, tj. $Q_j^a + Q_j^{in} = 0$, (j=1,2,...,s).

Lagranževe jednačine II vrste

Kinetička energija materijalnog sistema je $E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\cdot\vec{V}_i = E_K\left(q_j,\dot{q}_j,t\right)$, pa je $\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\cdot\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial\dot{q}_j}$. Kako je $\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial\dot{q}_j} = \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$, sledi $\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_j} = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}$.
Diferenciranjem prethodnog izraza po vremenu, dobija se

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right).$$

Osnovna jednačina kretanja tačke je $m_i\frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{F}_i^{a} + \vec{N}_i$, a već je pokazano da važi $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial\vec{V}_i}{\partial q_j}$, pa je

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_j}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}_i^{a} + \vec{N}_i\right)\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\cdot\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial q_j}.$$

Prvi član na desnoj strani prethodnog izraza predstavlja zbir odgovarajućih generalisanih sila

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i^{a}\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^{n}\vec{N}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = Q_j^a + Q_j^N,$$

a drugi član je parcijalni izvod kinetičke energije po generalisanoj koordinati, tj. $\frac{\partial E_K}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_i\cdot\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial q_j}$, pa je sada $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial\dot{q}_j}\right) = Q_j^a + Q_j^N + \frac{\partial E_K}{\partial q_j}$. U slučaju stacionarnih idealnih veza je $Q_j^N = \sum_{j=1}^{s}\vec{N}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{s}\vec{N}_i\cdot\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial\dot{q}_j} = 0$, jer je pravac vektora $\frac{\partial\vec{V}_i}{\partial\dot{q}_j}$ određen pravcem vektora $\vec{V}_i$, pri čemu je $\vec{V}_i \perp \vec{N}_i$. Tada su Lagranževe jednačine II vrste

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = Q_j^a .$$

Za sisteme koji su izloženi dejstvu konzervativnih sila je $Q_j = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j}$, pa prethodna jednačina postaje

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial E_K}{\partial q_j} = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j} .$$

U slučaju stacionarnih konzervativnih sistema važi da je $E_p = E_p(q_j)$, pa se dobija

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (E_K - E_p)}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial (E_K - E_p)}{\partial q_j} = 0 , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 ,$$

gde je $L = E_K - E_p$ - Lagranževa funkcija ili kinetički potencijal.

Ako Lagranževa funkcija $L = E_K - E_p$ ne zavisi od neke od generalisanih koordinata, npr. od koordinate q_r, tada je $\frac{d}{dt}\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_r} = 0$, pa je

$$\frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_r} = C_r = const. ,$$

što predstavlja prvi integral jedne od diferencijalnih jednačina kretanja i naziva se ciklični integral. U tom slučaju generalisana koordinata q_r naziva se ciklična koordinata.

Kinetička energija sistema izražena u generalisanim koordinatama

Kako je

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = E_K\left(q_j, \dot{q}_j, t\right),$$

$$\vec{V}_i = \dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} ,$$

tada je

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \left[\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_s\right)^2 + 2\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2}\dot{q}_1\dot{q}_2 + \cdots + 2\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_{s-1}}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\dot{q}_{s-1}\dot{q}_s + \right.$$

$$\left. 2\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_1 + \cdots + 2\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_s}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\dot{q}_s + \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2\right].$$

Uvođenjem oznaka, za *j*=1,2,...,*s* i *k*=1,2,...,*s*,

$$a_{jk} = a_{kj} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}, \; b_k = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}, \; c_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}\right)^2$$

izraz za kinetičku energiju može se napisati kao

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{k=1}^{s} b_k\dot{q}_k + \frac{1}{2}c_0 .$$

Koeficijenti $a_{jk} = a_{kj}$ nazivaju se inercioni koeficijenti (koeficijenti metričkog tenzora).

U slučaju stacionarnog sistema je $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$, odakle sledi da je $b_k = 0$ i $c_0 = 0$. Tada je kinetička energija određena sa

$$E_K = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{s} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k \ .$$