Нумеричке методе октобар 2023. (смене 2, 4 и 5)
Група 1

1. Показати да се систем линеарних једначина облика

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{\beta},$$

gde je

$$B = [3 - 3 \quad 10.1]\,, \qquad \vec{\beta} = [1 \quad 2]^\top,$$

može rešiti *Gauss–Seidel*–ovom, a ne može rešiti metodom proste iteracije.

2. Дата је функција f скупом података

x	14	17	31	35
$f(x)$	68.7	64.0	44.0	39.1

Korišćenjem *Lagrange*–ovog interpolacionog polinoma odrediti približno $f^{-1}(54.0)$.

3. Са тачношћу на четири децимале решити једначину

$$x = (x^2 - 1)e^{-x}.$$

4. Израчунати интеграл

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-\sin^2 x} \cos x \, dx$$

са тачношћу од $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

СРЕЋНО!!!

Нумеричке методе октобар 2023. (смене 2, 4 и 5)
Група 2

1. Показати да се систем линеарних једначина облика

$$\vec{x} = B\vec{x} + \vec{\beta},$$

где је

$$B = [0.1 - 3 \quad 13]\,, \qquad \vec{\beta} = [3.22 \quad 2.33]^{\top},$$

може решити *Gauss–Seidel*–овом, а не може решити методом просте итерације.

2. Дата је функција f скупом података

x	14	17	31	35
$f(x)$	68.7	64.0	44.0	39.1

Коришћењем *Newton*-овог интерполационог полинома одредити приближно $f^{-1}(54.0)$.

3. Са тачношћу на четири децимале решити једначину

$$xe^{x} + 1 = x^{2}.$$

4. Израчунати интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

са тачношћу од $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$.

СРЕЋНО!!!

Rešenja

Rešenje **1. zadatka za 1. grupu.** *(Za drugu grupu slično se rešava, a rešenje je isto.)*

Norme $\|\cdot\|_1,\ \|\cdot\|_2,\ \|\cdot\|_\infty$ matrice B su veće od jedinice pa dovoljni uslovi na osnovu ovih normi nisu ispunjeni.

Sopstvene vrednosti matrice B dobijamo rešavanjem karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 1 & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda^2 - 3.1\lambda + 3.3 = 0.$$

Važi $\lambda_{1,2} = 1.55 \pm 0.9474\, i$, pa je spektralni radijus $\varrho = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.816 > 1$. Dakle, metod proste iteracije za dati sistem divergira.

Sopstvene vrednosti matrice B_1 dobijamo rešavanjem jednačine

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ \lambda & 0.1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{tj.} \quad \lambda^2 - 0.1\lambda + 0.3 = 0.$$

Važi $\lambda_{1,2} = 0.05 \pm 0.5454\, i$, pa je spektralni radijus $\varrho(B_1) = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 0.5477$. Dakle, metod Gauss–Seidel–a za dati sistem konvergira.

Rešenje **2. zadatka za 1. grupu.** *(Za drugu grupu slično se rešava, samo se umesto Lagrange-ovog interpolacionog polinoma koristi Newton-ov interpolacioni polinom sa podeljenim razlikama, a rešenje je isto.)*

Zadatak se rešava inverznom interpolacijom, koristimo Lagrange-ov interpolacioni polinom. Tablica za inverznu funkciju je

y	68.7	64.0	44.0	39.1
$f^{-1}(y)$	14	17	31	35

Dobija se $f^{-1}(54.0) \cong 23.6$.

Rešenje **3. zadatka za 1. grupu.** *(Za drugu grupu postavljen je isti zadatak.)*

Skiciranjem grafika može se locirati rešenje jednačine (*).

Jednačinu (*) zapišimo u obliku

$$f(x) \equiv x - (x^2-1)e^{-x} = 0,$$

odakle je $f'(x) \equiv 1 + (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

Kako za nulu $x = a$ jednačine (*) važi $a \in [-1, 0)$ i kako je $f'(x) \neq 0$ za svako $x \in [-1, 0)$ to se na rešavanje jednačine može primeniti Newton–ov metod. ($f'(x) = 0$ kada je $x^2 - 2x - 1 = -e^{-x}$, tj. kada je $x = 0$ i $x = \xi \in (0, 1 + \sqrt{2})$.

Iterativna funkcija Newton–ovog metoda je

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x = \frac{x - (x^2 - 1)e^{-x}}{1 + (x^2 - 2x - 1)e^{-x}} .$$

Neka je startna vrednost npr. $x_0 = -1 \in [-1, 0)$.

Dobijene iteracije su:

$$x_1 = \varphi(x_0) = -0.84464, \quad x_2 = \varphi(x_1) = -0.80296,$$
$$x_3 = \varphi(x_2) = -0.80033, \quad x_4 = \varphi(x_3) = -0.80032, \ \ldots$$

Kako je $|x_4 - x_3| = 10^{-5}$, to je postignuta tražena tačnost pa uzimamo $a \cong -0.8003$.

Rešenje **4. zadatka za 2. grupu.** *(Za prvu grupu radi se o istom integralu pomnoženim sa* 2, *po uvodjenju smene* $t = \sin x$. *Rešenje je* 1.494.*)*

Integralimo funkciju $f(x) = e^{-x^2}$ na intervalu $[a, b] = [0, 1]$. Ako za približno izračunavanje traženog integrala koristimo složenu trapeznu formulu

$$T_n = \frac{b - a}{n} \left(\frac{1}{2} f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1} + \frac{1}{2} f_n \right),$$

potrebno je da odredimo n kako bismo dati integral izračunali sa zadatom tačnošću.

Iz

$$\left| -\frac{(b - a)^3}{12n^2} f''(\xi) \right| \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3},$$

znajući da $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, $|f''(x)| = |4x^2 - 2|\, e^{-x^2} \leq 2$, $x \in [0, 1]$, lako se zaključi da će tražena tačnost biti ispunjena ako uzmemo npr. $n = 20$. Rešenje je 0.747.