Рада Мутавџић Ђукић

1 Редови

1.1 Дефиниција и особине лимеса низа

Низ реалних бројева је функција $a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Примери низова су:

1° аритметички низ ($a_{n+1} - a_n = d$ за свако $n \in \mathbb{N}$);

2° геометријски низ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ за свако } n \in \mathbb{N}\right)$;

3° хармонијски низ $a_n = \frac{1}{n}$.

Дефиниција 1.1. (Лимес низа) Кажемо да је

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број N такав да, кад год је $n > N$ важи $|a_n - L| < \varepsilon$.

Другим речима, за свако довољно велико n вредност a_n је произвољно близу L.

Пример 1.1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (колико год малу околину нуле да изаберемо, постоји број N тако да је за све $n > N$ вредност $\frac{1}{n}$ у тој околини нуле). Формално, за произвољно $\varepsilon > 0$ треба да нађемо број N тако да за све $n > N$ важи $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Дакле, треба да буде $n > \frac{1}{\varepsilon}$ за све $n > N$, па је довољно да изаберемо неко N за које важи $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (нпр. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$).

Пример 1.2. Лимес геометријског низа:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \text{не постоји}, & q \leqslant -1. \end{cases}$$

Ако лимес низа постоји, кажемо да он(а) *конвергира*, а у супротном да *дивергира*.

Дефиниција 1.2. (Кошијев низ) Низ a_n је Кошијев, ако важи

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists n_0 \in \mathbb{N})\ (\forall m, n \in \mathbb{N})\ (m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

У скупу $\mathbb{R}$ важи да је низ конвергентан акко је Кошијев.

Теорема 1.1. (Теорема о монотоном и ограниченом низу) Монотоно растући низ који је ограничен одозго има коначну граничну вредност.

1.2 Увод о редовима

Нека је $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ бројева. Тада се бесконачна сума

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \tag{1.1}$$

назива (бесконачни) ред, а a_n је његов општи члан. Парцијална сума реда је

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ако низ парцијалних сума $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергентан, тада кажемо да је ред (1.1) конвергентан:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L \quad \text{ако је} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = L.$$

У супротном кажемо да је ред (1.1) дивергентан.

Пример 1.3. Испитати конвергенцију геометријског реда $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$.

За $q = 1$ је $S_n = n$, па је $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.

За $q \neq 1$ је $S_n = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$ и $qS_n = q + q^2 + \cdots q^n$, па је $S_n - qS_n = 1 - q^n$, одакле је $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Коначно, низ S_n има коначан лимес за $|q| < 1$ и важи $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

Пример 1.4. За $|q| < 1$ наћи суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$.

Дати ред се може записати у облику

$$q \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = q \sum_{n=1}^{\infty} (q^n)' = q \left(\sum_{n=1}^{\infty} q^n \right)'.$$

На основу претходног примера је $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} - 1 = \frac{1}{1-q} - 1 = \frac{q}{1-q}$. Дакле, тражена сума је $q\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{q}{(1-q)^2}$.

Пример 1.5. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Приметимо да је $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, па је m-та парцијална сума реда

$$S_m = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Дакле, сума реда је $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$.

Пример 1.6. (Домаћи) Испитати конвергенцију реда а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k)(n+k+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$.

Посматрајмо сада остатак реда (1.1)

$$R_m = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n. \tag{1.2}$$

Како је разлика суме (1.1) и (1.2) коначна као збир коначно сабирака, важи наредна теорема.

Теорема 1.2. Редови (1.1) и (1.2) истовремено конвергирају и дивергирају.

Теорема 1.3. Ако ред (1.1) конвергира, тада је $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

Доказ. Како је $S_m + R_m = S$, то је $\lim_{m\to\infty} R_m = \lim_{m\to\infty}(S - S_m) = S - \lim_{m\to\infty} S_m = S - S = 0$. □

Теорема 1.4. (Тест општег члана) Ако је ред (1.1) конвергентан, тада општи члан реда $a_n \to 0$ кад $n \to \infty$.

Доказ. Како је $a_n = S_n - S_{n-1}$, важи $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$. □

Обратно тврђење не важи. Примера ради, општи члан хармонијског реда $a_n = \frac{1}{n}$ тежи нули, а ред је дивергентан, што ће бити показано касније.

Еквивалентно тврђење претходној теореми је да ако $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или овај лимес не постоји, тада је ред (1.1) дивергентан.

Нека су $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ два конвергентна реда и нека је λ реална константа. Тада важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Пример 1.7. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$.

Приметимо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$, па како општи члан не тежи нули, ред дивергира.

Теорема 1.5. (Кошијев општи критеријум конвергенције) Ред (1.1) је конвергентан акко за свако $\varepsilon > 0$ постоје природни бројеви k и $n_0 = n_0(\varepsilon)$, тако да за свако $n \geqslant n_0$ важи $|S_{n+k} - S_n| < \varepsilon$.

Пример 1.8. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

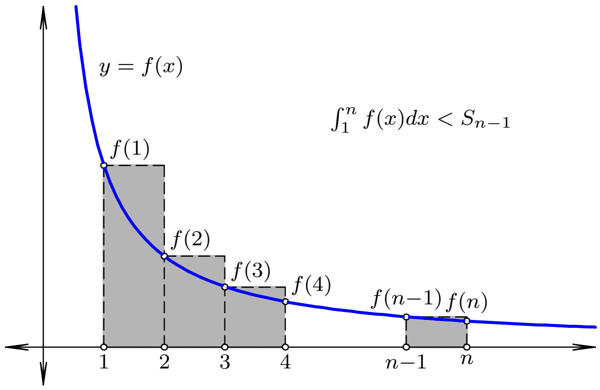
Приметимо да је $|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdot + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$, па је ред дивергентан.

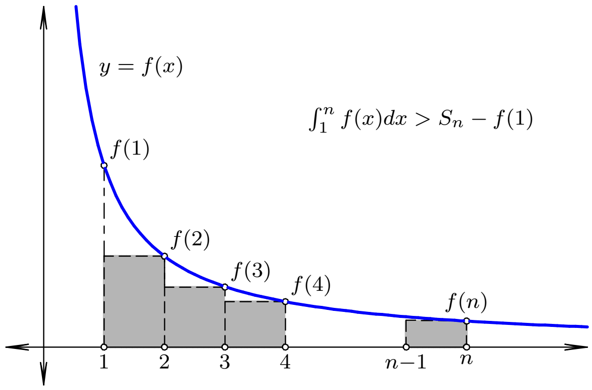
1.3 Редови са позитивним члановима

Посматрајмо сада ред (1.1), при чему је $a_n > 0$. Тада је низ парцијаних сума монотоно растући и на основу теореме о монотоном и ограниченом низу важи наредно тврђење.

Теорема 1.6. Ред (1.1) са позитивним члановима конвергира акко је низ његових парцијалних сума ограничен са горње стране.

Теорема 1.7. (Кошијев интеграли критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, опадајућа и позитивна функција за $x \in [1, \infty)$. Тада су несвојствени интеграл $\int_1^\infty f(x)dx$ и ред $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ еквиконвергентни.





Доказ. Површина омеђена кривом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = 1$ и $x = n$ једнака је одређеном интегралу $\int_1^n f(x)dx$. Даље, парцијална сума $S_{n-1} = f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1)$ једнака је збиру површина правоугаоника ширина 1 и дужина $f(1), \ldots, f(n-1)$ (слика лево). Очигледно важи $\int_1^n f(x)dx < S_{n-1}$, па је $\int_1^n f(x)dx < S_n$. Слично, вредност $S_n - f(1)$ представља збир површина правоугаоника ширина 1 и дужина $f(2), \ldots, f(n)$ (слика десно), па је $S_n - f(1) < \int_1^n f(x)$. Дакле

$$\int_1^n f(x)dx < S_n < f(1) + \int_1^n f(x)dx.$$

На основу десне (леве) неједнакости важи да ако је интеграл $\int_1^\infty$ ковергентан (дивергентан), такав је и полазни ред. ∎

Пример 1.9. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ за $p > 0$.

Функција $f(x) = \frac{1}{x^p}$ је непрекидна, опадајућа и позитивна на интервалу $[1, \infty)$, па можемо да применимо Кошијев интегрлни критеријум, тј. да посматрамо несвојствени интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$.

За $p \neq 1$ је

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{x^{1-p}}{1-p} \right) \Big|_1^b = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1} \quad \text{за} \quad p > 1.$$

За $p = 1$ је

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} (\ln x)\big|_1^b = \infty.$$

Дакле, ред $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ конвергира за $p > 1$, а дивергира за $0 < p \leqslant 1$.

Пример 1.10. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$.

Функција $f(x) = \frac{1}{x \ln x \ln \ln x}$ задовољава услове Теореме 1.7, па посматрамо несвојствени интеграл

$$\lim_{b\to\infty} \int_3^b \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} = \left[\begin{matrix} \ln \ln x = t, \\ dx/(x \ln x) = dt \end{matrix} \right] = \lim_{b\to\infty} \int_{\ln \ln 3}^b \frac{dt}{t^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{t} \right) \Big|_{\ln \ln 3}^b = \frac{1}{\ln \ln 3} < \infty,$$

па како је овај интеграл конвергентан, такав је и полазни ред.

Теорема 1.8. (Први поредбени критеријум) Ако за дате редове са позитивним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ постоји природан број n_0 такав да важи $a_n \leqslant b_n$ за свако $n \geqslant n_0$, важи:

- ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентан, тада је и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан;
- ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергентан, тада је и ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ дивергентан.

Пример 1.11. Испитати конвергенцију реда а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n+2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

а) Како је $\frac{1}{n^2+2n+2} < \frac{1}{n^2}$ за $n \in \mathbb{N}$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ је конвергентан, такав је и полазни ред.

б) Приметимо да је $e^{\frac{1}{n}} \leqslant e$ за $n \geqslant 1$, па је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2} = e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

а пошто је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конвергентан, према првом поредбеном критеријуму такав је полазни ред.

Теорема 1.9. (Други поредбени критеријум) Ако за дате редове са позитивним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ постоји коначна гранична вредност $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, $l \neq 0$, тада су дати редови истовремено конвергенти, односно дивергентни (еквиконвергентни су).

Пример 1.12. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$.

Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ је конвергентан и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 1,$$

па према другом поредбеном критеријуму полазни ред је такође конвергентан.

Пример 1.13. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$.

Приметимо да је $\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}$. Како је $\sin t \sim t$ када $t \to 0$, то је према другом поредбеном критеријуму полазни ред еквиконвергентан реду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}$. Даље је $\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}} \leqslant \frac{1}{2n^{3/2}}$, а како је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$ конвергентан, такав је и полазни ред.

Теорема 1.10. (Даламберов критеријум) Ако за ред са позитивним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ постоји коначна гранична вредност $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, тада за $l < 1$ ред конвергентан, а за $l > 1$ дивергентан.

Пример 1.14. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Према Даламберовом критеријуму, рачунамо наредну граничну вредност

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \right) = \frac{1}{4} < 1,$$

па је дати ред конвергентан.

Теорема 1.11. (Кошијев корени критеријум) Ако за ред са позитивним члановима $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ постоји коначна гранична вредност $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, тада је за $l < 1$ ред конвергентан, а за $l > 1$ дивергентан.

Пример 1.15. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{3n+1}}$.

На основу Кошијевог кореног критеријума,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}} = \infty,$$

дати ред је дивергентан.

Пример 1.16. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

На основу Кошијевог кореног критеријума

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

дати ред је конвергентан.

2 Алтернирајући редови

Дефиниција 2.1. (Алтернирајући редови) Ред чији знакови наизменично мењају знак

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n, \quad a_n > 0 \tag{2.1}$$

зовемо алтернирајућим или наизменичним редом.

Теорема 2.1. (Лајбницов тест) Ред (2.1) конвергира ако низ a_n (апсолутних вредности његовог општег члана) монотоно опада и тежи нули

Пример 2.1. Ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ има општи члан $(-1)^{n-1}a_n$, при чему $a_n = \frac{1}{n}$ монотоно тежи нули кад $n \to \infty$, па дати ред конвергира.

У Лајбницовом тест конвергенције дати су довољни услове за конвергенцију, али не и неопходни. Пример наизменичног реда који није монотон а конвергира је

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}.$$

Теорема 2.2. (Процена алтернирајућег реда) Ако је L сума реда (2.1), тада парцијална сума

$$S_m = \sum_{n=1}^{m}(-1)^{n-1}a_n$$

апроксимира L са грешком која је ограничена следећим изостављеним чланом:

$$|S_m - L| \leqslant |S_m - S_{m+1}| = a_{m+1}.$$

2.1 Апсолутно конвергентни редови

Дефиниција 2.2. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ је апсолутно конвергентан, ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан.

Ако конвергенција реда није апсолутна, зовемо је условном конвергенцијом.

Теорема 2.3. Ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ конвергентан, тада је и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан.

Орбунуто тврђење не мора да важи: сетимо се примера $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Пример 2.2. Испитати конвергенцију (апсолутну и условну) реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}n!}$.

Проверимо да ли ред конвергира апсолутно, тј. да ли конвергира ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}$. Користимо Даламберов критеријум, тј. посматрамо лимес

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(n+1)} = 0 < 1,$$

па полазни ред конвергира апсолутно (одакле следи да конвергира и ред $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$).

3 Бесконачни производ

За дати низ бројева $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ дефинишемо бесконачни производ

$$\Pi_{n=1}^{\infty} p_n \neq 0.$$

Елемент p_n је општи члан, а парцијални производ је $P_m = \Pi_{n=1}^{m} p_n$. Потребан услов за конвергенцију бесконачног производа је да његов општи члан тежи јединици.

Како је $\ln(p_1 \cdot p_2 \cdots p_n) = \ln p_1 + \ln p_2 + \cdots + \ln p_n$, важи наредно тврђење.

Теорема 3.1. Бесконачни производ $\Pi_{n=1}^{\infty} p_n$, $p_n > 0$ и ред $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ су еквиконвергентни.

Пример 3.1. Испитати конвергенцију бесконачног производа $\Pi_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

На основу претходе теореме, посматрамо ред $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$. Како је $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$, тј.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1,$$

а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ је конвергентан, према другом поредбеном критеријуму такав је и полазни ред.