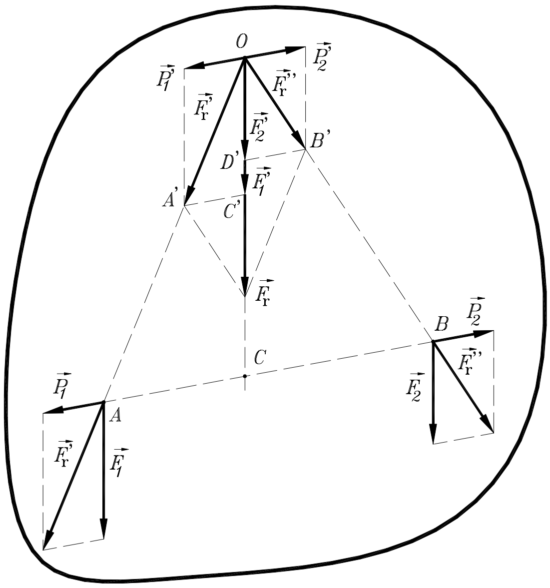
Spreg sila

Slaganje dveju paralelnih sila

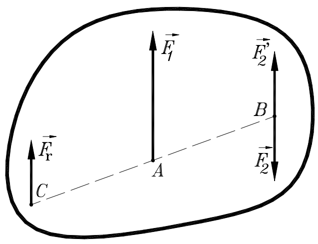


Posmatra se sistem od dve paralelne sile istog smera $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje deluju u tačkama A i B tela. Može se pokazati da se ovaj sistem sila može zameniti jednostavnijim, njemu ekvivalentnim sistemom sučeljnih sila za koji se zna da ima rezultantu.

$$(\vec{P}_1, \vec{P}_2) \sim 0$$
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{P}_1, \vec{P}_2)$$
$$(\vec{F}_1, \vec{P}_1) \sim \vec{F}_r', \quad (\vec{F}_2, \vec{P}_2) \sim \vec{F}_r''$$
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_r', \vec{F}_r'')$$
$$(\vec{F}_r', \vec{F}_r'') \sim \vec{F}_r$$
$$\vec{F}_r = \vec{F}_r' + \vec{F}_r''$$
$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$\vec{F}_r' \sim (\vec{F}_1', \vec{P}_1'), \quad \vec{F}_r'' \sim (\vec{F}_2', \vec{P}_2')$$
$$(\vec{F}_r', \vec{F}_r'') \sim (\vec{F}_1', \vec{P}_1', \vec{F}_2', \vec{P}_2')$$
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_1', \vec{F}_2')$$
$$\vec{F}_r = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$$

Za određivanje položaja napadne linije vektora $\vec{F}_r$, uočavaju se dva para sličnih trouglova

$$\Delta OAC \sim \Delta OA'C'$$
$$\Delta OBC \sim \Delta OB'D'$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}} \qquad \frac{\overline{AC}}{P_1} = \frac{\overline{OC}}{F_1}$$
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{D'B'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD'}} \qquad \frac{\overline{CB}}{P_2} = \frac{\overline{OC}}{F_2}$$
$$\overline{AC}F_1 = \overline{CB}F_2 \qquad \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{CB}}{F_1}$$
$$F_1\overline{AC} + F_1\overline{BC} = F_2\overline{BC} + F_1\overline{BC}$$
$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{F_r}$$



Sistem od dve paralelne sile istog smera, koje deluju na telo, ima rezultantu čiji je intenzitet jednak zbiru intenziteta komponenata, koja je istog smera kao i komponente, i koja se nalazi bliže sili većeg intenziteta na rastojanju koje je određeno prthodnom relacijom.

Neka je dat sistem od dve paralelne sile suprotnog smera $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ $(F_1 > F_2)$, koje deluju u tačkama A i B tela. Najpre se sila $\vec{F}_1$ razlaže na dve komponente $\vec{F}_r$ i $\vec{F}_2'$, takve da je $\vec{F}_2' = -\vec{F}_2$, odnosno

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_r + \vec{F}_2'$$
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim (\vec{F}_r, \vec{F}_2', \vec{F}_2)$$
$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{F}_r$$
$$\vec{F}_1 = \vec{F}_r - \vec{F}_2$$
$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Kako je $F_1 > F_2$, sledi

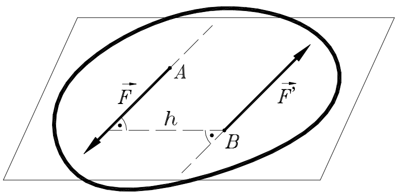
$$F_r = F_1 - F_2$$

Polazeći od toga da je $\vec{F}_1$ rezultanta paralelnih sila $\vec{F}_r$ i $\vec{F}_2'$, primenom postupka datog pri slaganju paralelnih sila istog smera, dobija se

$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{F_r}$$

Spreg sila

Sistem od dve paralelne sile jednakih intenziteta, suprotnih smerova, čije se napadne linije nalaze na konačnom rastojanju, naziva se spreg sila.

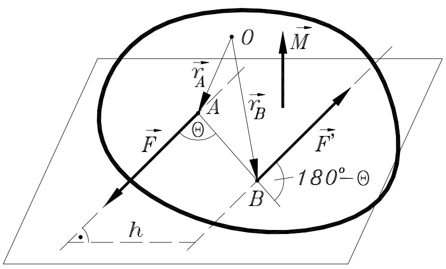


Ravan određena napadnim linijama sila sprega, naziva se ravan dejstva sprega sila. Najkraće rastojanje *h* između napadnih linija sila sprega naziva se krak sprega.

Moment sprega sila, koji obeležava se sa $\vec{M}$ i definiše na sledeći način:

- intenzitet momenta sprega sila jednak je proizvodu intenziteta sile F i kraka sprega sila *h*, tj. $M = Fh$,
- pravac momenta sprega sila upravan je na ravan dejstva sprega sila,
- smer momenta sprega sila je na onu stranu odakle se obrtno dejstvo sprega sila vidi kao matematički pozitivno.

Za moment sprega sila može se formulisati sledeće tvrđenje: vektor momenta sprega sila jednak je glavnom momentu sila sprega za proizvoljno izabranu tačku.



$$\vec{M}_o = \vec{M}_o(\vec{F}) + \vec{M}_o(\vec{F}')$$
$$\vec{M}_o = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{r}_B \times \vec{F}'.$$
$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \overrightarrow{BA}, \quad \vec{F}' = -\vec{F}$$
$$\vec{M}_o = (\vec{r}_B + \overrightarrow{BA}) \times \vec{F} - \vec{r}_B \times \vec{F}.$$
$$\vec{M}_o = \overrightarrow{BA} \times \vec{F}$$

Glavni moment sila sprega jednak momentu jedne sile za tačku na napadnoj liniji druge sile.

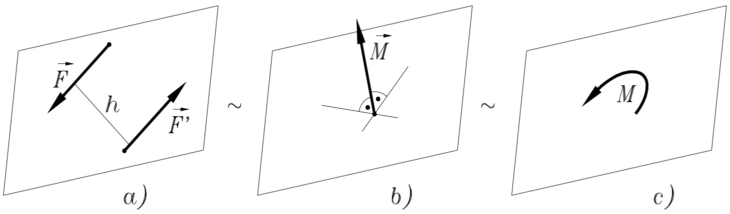
Intenzitet glavnog momenta sprega sila dat je sa

$$M_o = F' \left| \overline{AB} \sin(180° - \theta) \right| = F \overline{AB} \left| \sin\theta \right| \quad M_o = Fh$$

Pravac glavnog momenta sprega sila upravan je na ravan dejstva sprega sila.

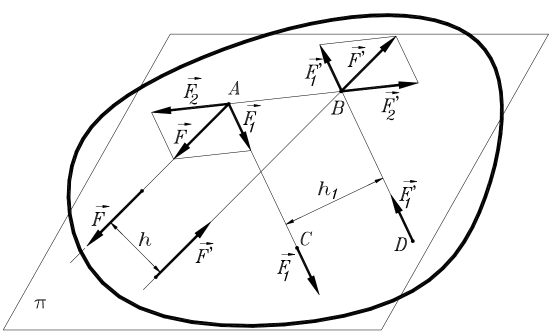
Smer glavnog momenta sprega sila je na onu stranu prostora odakle se obrtanje vektora $\overrightarrow{AB}$, najkraćim putem do poklapanja sa vektorom $\vec{F}'$, vidi kao matematički pozitivno.

Na osnovu toga zaključuje se da intenzitet, pravac i smer glavnog momenta sila sprega, odgovara vektoru momenta sprega sila $\vec{M}$, što je trebalo i pokazati.



Ekvivalentnost spregova sila

<u>Teorema 1</u>: Dejstvo datog sprega sila na telo neće se promeniti ako se taj spreg sila zameni bilo kojim drugim spregom sila koji ima istu ravan dejstva, isti smer i intenzitet momenta sa polaznim spregom sila.



<u>Dokaz</u>: Neka na posmatrano telo u ravni π deluje spreg sila $(\vec{F},\vec{F}')$ čiji je krak h

$$\vec{F} \sim (\vec{F}_1,\vec{F}_2), \quad \vec{F}' \sim (\vec{F}_1',\vec{F}_2')$$
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_1', \quad \vec{F}_2 = -\vec{F}_2'$$
$$(\vec{F},\vec{F}') \sim (\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_1',\vec{F}_2')$$
$$(\vec{F}_2,\vec{F}_2') \sim 0$$
$$(\vec{F},\vec{F}') \sim (\vec{F}_1,\vec{F}_1')$$

Primenom posledice prve i druge aksiome na sile dobijenog sprega sila $(\vec{F}_1,\vec{F}_1')$, napadne tačke sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_1'$ mogu se pomeriti duž njihovih napadnih linija u proizvoljno izabrane tačke, npr. C i D. S obzirom na proizvoljnost izbora tačaka A i B na napadnim linijama polaznog sprega sila $(\vec{F},\vec{F}')$, kao i na proizvoljnost izbora pravaca AC i BD, vidi se da novi spreg sila $(\vec{F}_1,\vec{F}_1')$ može da zauzme proizvoljan položaj u ravni dejstva prvog sprega sila, pri čemu krak h_1 novog sprega sila ne može da bude proizvoljan.

Na osnovu *Varinjonove* teoreme o momentu rezultante sučeljnog sistema sila, sledi da je

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_B(\vec{F}_1) + \vec{M}_B(\vec{F}_2)$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}_2) = 0, \quad \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_B(\vec{F}_1)$$
$$Fh = F_1 h_1$$

<u>Teorema 2</u>: Dejstvo datog sprega sila na telo neće se promeniti ako se taj spreg sila prenese iz njegove ravni dejstva u bilo koju drugu paralelnu ravan.

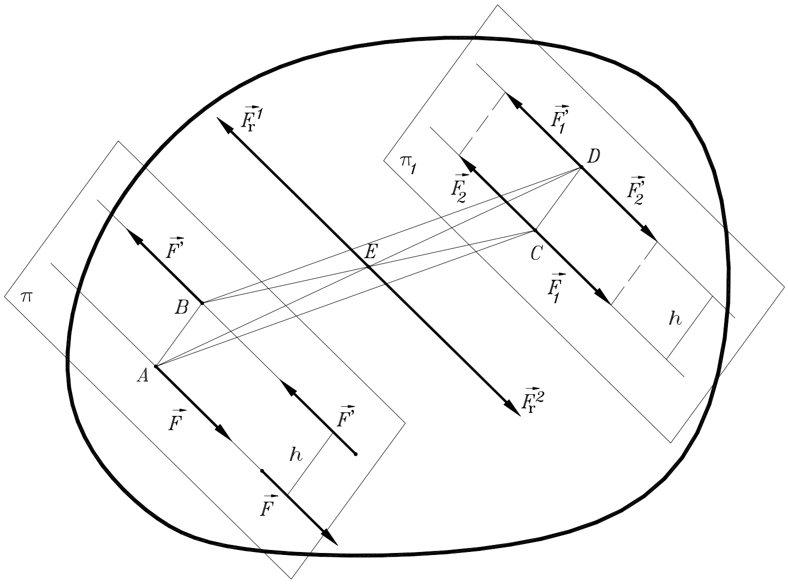
<u>*Dokaz:*</u> Neka na posmatrano telo u ravni π deluje spreg sila $(\vec{F},\vec{F}')$ čiji je krak h.

$$(\vec{F},\vec{F}') \sim (\vec{F},\vec{F}',\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_1',\vec{F}_2')$$

pri čemu važi

$$\vec{F} = \vec{F}_1 = \vec{F}_2' = -\vec{F}' = -\vec{F}_1' = -\vec{F}_2$$

$$F = F_1 = F_2 = F' = F_1' = F_2'$$



$$\vec{F}_r^{\,1} = -\vec{F}_r^{\,2}, \qquad F_r^1 = F_r^2$$
$$(\vec{F}', \vec{F}_2) \sim \vec{F}_r^{\,1} \quad \text{i} \quad (\vec{F}, \vec{F}_2') \sim \vec{F}_r^{\,2}$$
$$(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1', \vec{F}_r^{\,1}, \vec{F}_r^{\,2})$$

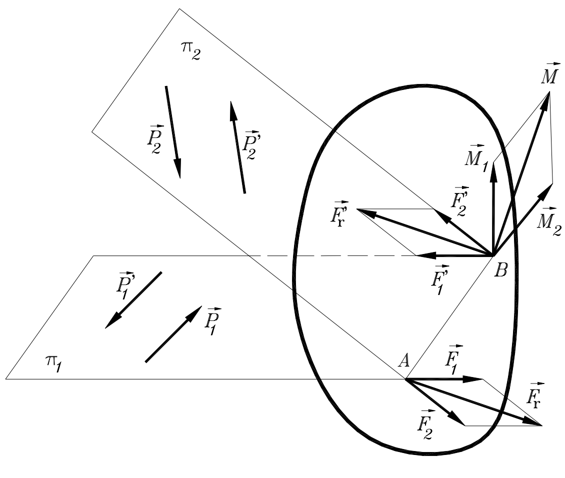
$$(\vec{F}, \vec{F}') \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_1')$$

Na taj način je pokazano da se polazni spreg sila $(\vec{F}, \vec{F}')$ može zameniti drugim spregom sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ istog momenta, koji deluje u paralelnoj ravni, odnosno preneti u paralelnu ravan, čime je teorema dokazana.

Iz prethodnih teorema sledi da su dva sprega sila koji deluju na telo, čiji su momenti jednaki, međusobno su ekvivalentni.

Slaganje spregova sila

Neka je dat sistem od dva sprega sila $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ i $(\vec{P}_2, \vec{P}_2')$ koji će biti označen sa $((\vec{P}_1, \vec{P}_1'), (\vec{P}_2, \vec{P}_2'))$. Neka spreg sila $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ deluje u ravni π_1 a spreg sila $(\vec{P}_2, \vec{P}_2')$ u ravni π_2 i neka je presek tih ravni prava koja prolazi kroz tačke A i B.



Koristeći teoremu o slobodnom pomeranju sprega sila u ravni svog dejstva, spreg sila $(\vec{P}_1, \vec{P}_1')$ može se zameniti njemu ekvivalentnim spregom sila $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, pri čemu sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_1'$ novog sprega sila deluju u tačkama A i B iste ravni π_1. Takođe, koristeći istu teoremu, spreg sila $(\vec{P}_2, \vec{P}_2')$ može se zameniti ekvivalentnim spregom sila $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ pri čemu sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_2'$ novog sprega sila takođe deluju u tačkama *A* i *B* ravni π_1, odnosno π_2. Ovim postupkom dobijena su dva sprega sila $(\vec F_1,\vec F_1')$ i $(\vec F_2,\vec F_2')$ koji imaju zajednički krak *AB*. Tako je polazni sistem spregova sila transformisan u novi

$$((\vec P_1,\vec P_1'),(\vec P_2,\vec P_2')) \sim ((\vec F_1,\vec F_1'),(\vec F_2,\vec F_2'))$$

$$(\vec F_1,\vec F_2) \sim \vec F_r, \quad (\vec F_1',\vec F_2') \sim \vec F_r'$$

$$\vec F_r = \vec F_1 + \vec F_2, \quad \vec F_r' = \vec F_1' + \vec F_2'$$

$$\vec F_r = -\vec F_r'$$

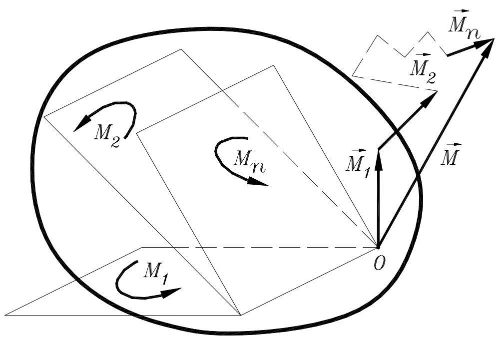
$$((\vec P_1,\vec P_1'),(\vec P_2,\vec P_2')) \sim (\vec F_r,\vec F_r')$$

Između momenta sprega sila polaznog sistema i momenta novodobijenog sprega sila, može se uspostaviti veza. Momenti spregova polaznog sistema spregova sila su

$$\vec M_1 = \vec M(\vec P_1,\vec P_1') = \vec M(\vec F_1,\vec F_1') = \overrightarrow{BA} \times \vec F_1$$
$$\vec M_2 = \vec M(\vec P_2,\vec P_2') = \vec M(\vec F_2,\vec F_2') = \overrightarrow{BA} \times \vec F_2$$

$$\vec M = \vec M(\vec F_r,\vec F_r') = \overrightarrow{BA} \times \vec F_r$$
$$\vec M = \overrightarrow{BA} \times (\vec F_1 + \vec F_2) = \vec M_1 + \vec M_2$$

Izložena teorija važi samo za slaganje spregova sila koji deluju na kruto telo i može se uopštiti za slučaj proizvoljnog broja spregova sila. Ako su to spregovi sila $(\vec F_1,\vec F_1'),(\vec F_2,\vec F_2'),\ldots,(\vec F_n,\vec F_n')$, tada je dejstvo takvog sistema spregova sila okarakterisano njihovim momentima $\vec M_1, \vec M_2, \ldots, \vec M_n$, koji su upravni na odgovarajuće ravni. S obzirom na to da su ti momenti slobodni vektori, mogu se dovesti paralelnim pomeranjem u proizvoljno izabranu zajedničku tačku *O*. Na taj način dobijen je sistem vektora sa zajedničkom tačkom (sistem sučeljnih vektora), koji se može zameniti jednim vektorom (rezultujući moment, glavni moment sistema spregova sila), a čije se određivanje svodi na određivanje vektorskog zbira



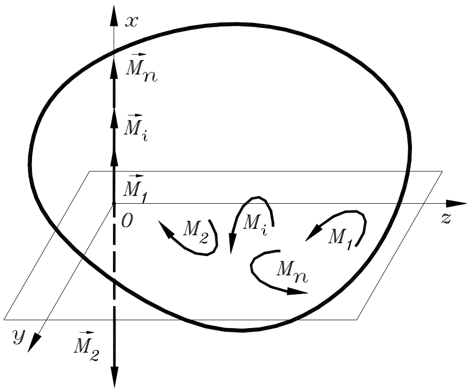
$$\vec M = \sum_{i=1}^{n} \vec M_i$$

Moment rezultujućeg sprega sila (glavni moment), sistema spregova sila, jednak je vektorskom zbiru momenata komponentalnih spregova sila, odnosno predstavlja glavni moment sistema spregova sila.

Osim geometrijske metode za određivanje rezultujućeg sprega sila može se koristiti i analitička metoda.

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}, \quad M_y = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}, \quad M_z = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}$$
$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$
$$\cos\alpha_M = \frac{M_x}{M}, \quad \cos\beta_M = \frac{M_y}{M}, \quad \cos\gamma_M = \frac{M_z}{M}$$

Ako na telo deluje sistem od *n* spregova sila $(\vec{F}_1,\vec{F}_1'),(\vec{F}_2,\vec{F}_2'),\dots,(\vec{F}_n,\vec{F}_n')$ u jednoj ravni, npr. u koordinatnoj ravni *Oyz*, tada za momente tih spregova sila važi



$$\vec{M}_i = M_{ix}\vec{i}$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}\vec{i}$$

$$\vec{M} = M_x\vec{i}$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}$$

Uslovi ravnoteže sistema spregova sila

Potreban i dovoljan uslov da bi prostorni sistem spregova sila bio uravnotežen, jeste da je vektorski zbir momenata svih spregova sila jednak nuli, tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$$

U slučaju spregova sila koji deluju u jednoj ravni, umesto tri uslova ravnoteže postoji samo jedan, koji se odnosi na osu upravnu na zajedničku ravan dejstva datog sistema spregova sila, npr.

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0\,.$$