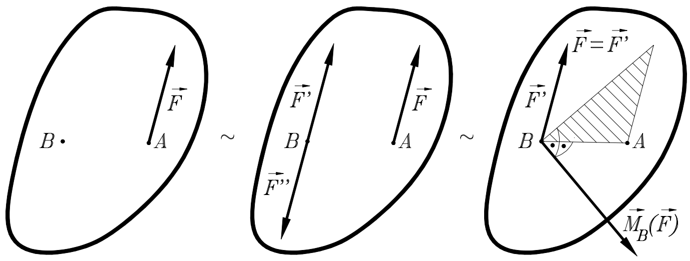
Osnovne teoreme Statike

Teorema o paralelnom prenošenju sile

Teorema: Dejstvo sile na telo neće se promeniti pri njenom paralelnom prenošenju u drugu tačku tela ako joj se doda jedan spreg sila čiji je moment jednak momentu sile koja se prenosi za tačku u koju se ta sila prenosi.



Dokaz: Posmatra se sila $\vec{F}$ koja deluje u tački A tela. Neka je sa B označena tačka van napadne linije sile $\vec{F}$ u koju treba preneti tu silu. U tom cilju se u tački B dodaje uravnotežen sistem sila $(\vec{F}',\vec{F}'')$, takav da je

$$\vec{F} = \vec{F}' = -\vec{F}'', \quad F = F' = F''$$

$$\vec{F} \sim (\vec{F},\vec{F}',\vec{F}'')$$

$$\vec{F} \sim (\vec{F}',(\vec{F},\vec{F}''))$$

Ako se moment sprega sila $(\vec{F},\vec{F}'')$ označi sa $\vec{M}_B(\vec{F})$, tj.

$$\vec{M}_B(\vec{F})=\vec{M}(\vec{F},\vec{F}'')=\overrightarrow{BA}\times\vec{F}$$

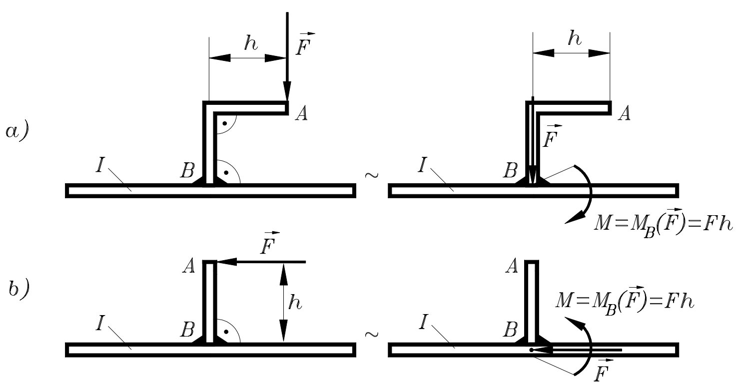
sledi

$$\vec{F} \sim (\vec{F};\vec{M}_B(\vec{F})).$$

Ovaj postupak se u literaturi naziva redukcija sile na tačku. Tačka u koju se sila paralelno prenosi naziva se pol (centar) redukcije ili redukciona tačka.

a) *Poprečna ekscentrična sila.*

b) *Podužna ekscentrična sila.*

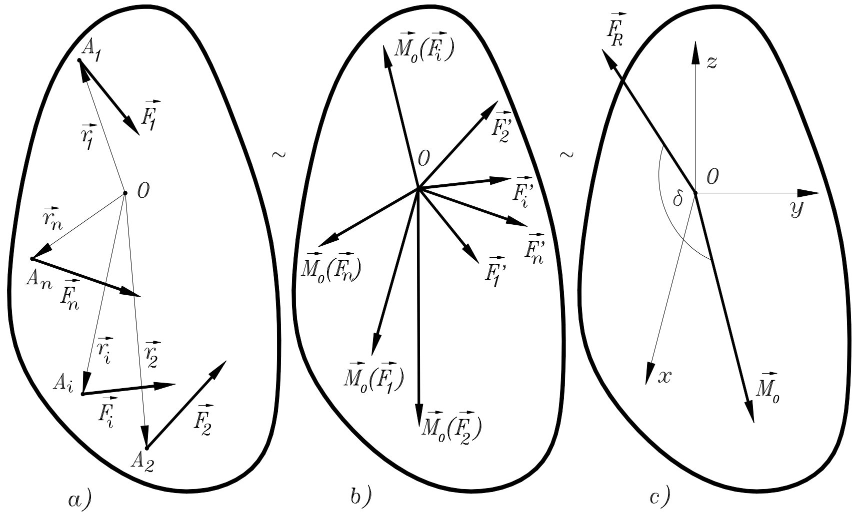


sl.53

Osnovna teorema Statike

<u>Teorema</u>: *Dejstvo proizvoljnog sistema sila na telo može se zameniti jednom silom, koja je jednaka glavnom vektoru sistema sila, čija napadna linija prolazi kroz proizvoljno izabranu redukcionu tačku tela i jednim spregom sila čiji je moment jednak glavnom momentu datog sistema sila u odnosu na istu redukcionu tačku.*

<u>Dokaz</u>: Posmatra se proizvoljan prostorni sistem od n sila $(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots,\vec{F}_i,\ldots,\vec{F}_n)$ koji deluje u tačkama $A_1, A_2,\ldots, A_i,\ldots, A_n$ tela, čiji su položaji određeni vektorima položaja $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_i,\ldots,\vec{r}_n$ u odnosu na proizvoljno izabrani centar redukcije O.



$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots,\vec{F}_n) \sim (\vec{F}_1',\vec{F}_2',\ldots,\vec{F}_n';\, \vec{M}_o(\vec{F}_1), \vec{M}_o(\vec{F}_2),\ldots, \vec{M}_o(\vec{F}_n))$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i', \qquad F_i = F_i'$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$$(\vec{F}_1',\vec{F}_2',\ldots,\vec{F}_n') \sim \vec{F}_R, \quad (\vec{M}_o(\vec{F}_1), \vec{M}_o(\vec{F}_2),\ldots, \vec{M}_o(\vec{F}_n)) \sim \vec{M}_o$$

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i, \quad \vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i).$$

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots,\vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R;\, \vec{M}_o)$$

– <u>glavni vektor</u> datog sistema sila <u>ne zavisi</u> od izbora redukcione tačke,

– <u>glavni moment</u> datog sistema sila <u>zavisi</u> od izbora redukcione tačke.

Za razmatranja koja slede bitan je i ugao između vektora $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_o$.

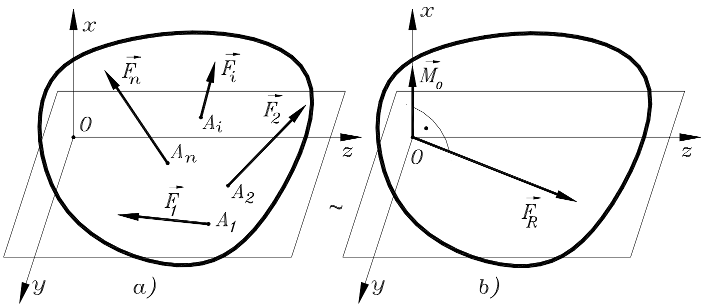
$$\vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = F_R M_o cos\delta$$

$$\vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = X_R M_{ox} + Y_R M_{oy} + Z_R M_{oz}$$

$$cos\delta = \frac{X_R}{F_R}\frac{M_{ox}}{M_o} + \frac{Y_R}{F_R}\frac{M_{oy}}{M_o} + \frac{Z_R}{F_R}\frac{M_{oz}}{M_o}$$

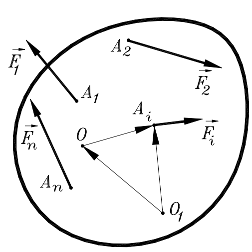
U slučaju kada na telo deluje proizvoljan ravan sistem sila, npr. u koordinatnoj ravni Oyz, moguće je formulisati specijalni oblik osnovne teoreme Statike koji se često primenjuje u konkretnim zadacima: *Dejstvo proizvoljnog ravnog sistema sila na telo može se zameniti jednom silom koja je jednaka glavnom vektoru datog sistema sila sa napadnom tačkom u redukcionoj tački tela, a napadnom linijom u ravni dejstva sila i jednim spregom sila čiji moment ima projekciju samo na osu koja prolazi kroz redukcionu tačku, a koja je upravna na ravan dejstva svih sila, pri čemu je ta projekcija jednaka projekciji glavnog momenta datog sistema sila na tu osu.*

$$(\vec{F}_1,\vec{F}_2,\ldots,\vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R;\, M_{ox}\vec{i}).$$



Svođenje sistema sila na prostiji oblik

Promena glavnog momenta pri promeni redukcione tačke

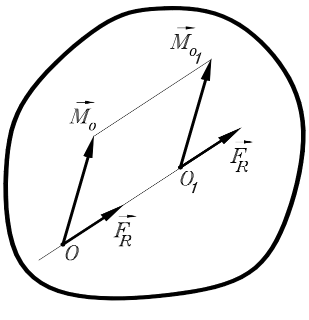


$$\vec{M}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_{o_1} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_{o_1}(\vec{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1A_i} \times \vec{F}_i$$

$$\overrightarrow{O_1A_i} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OA_i}$$

$$\vec{M}_{o_1} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_i + \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i$$



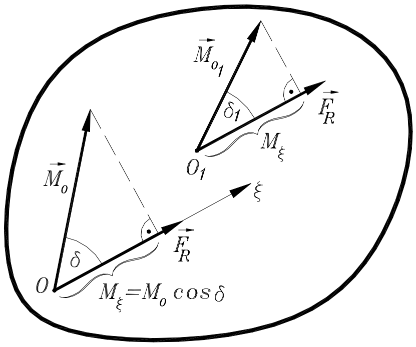
$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_i = \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{M}_{o_1} = \vec{M}_o + \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R$$

Može se zaključiti da se glavni moment neće menjati ako je:

- $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R = 0$, tj. ako su vektori $\overrightarrow{O_1O}$ i $\vec{F}_R$ kolinearni
- $\vec{F}_R = 0$.

Statičke invarijante



Skalarne, odnosno, vektorske veličine koje se ne menjaju pri promeni redukcione tačke, nazivaju se statičke invarijante.

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R_1} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Glavni vektor sistema sila koji deluje na telo je prva statička invarijanta.

$$\vec{M}_{o_1} \cdot \vec{F}_R = (\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R) \cdot \vec{F}_R + \vec{M}_o \cdot \vec{F}_R$$

$$(\overrightarrow{O_1O} \times \vec{F}_R) \cdot \vec{F}_R = 0$$

$$\vec{M}_{o_1} \cdot \vec{F}_{R_1} = \vec{M}_o \cdot \vec{F}_R$$

$$M_{o_1} F_{R_1} cos\delta_1 = M_o F_R cos\delta$$

Kako je $\vec{F}_R = \vec{F}_{R_1} \neq 0$, sledi da je

$$M_{o_1} cos\delta_1 = M_o cos\delta = M_\xi = const.$$

Projekcija glavnog momenta na pravac glavnog vektora ne zavisi od izbora redukcione tačke.

Svođenje sistema sila na prostiji oblik

I) $\vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = F_R M_o cos\delta = 0$

a) $\vec{F}_R = 0; \quad \vec{M}_o = 0$

i tada je proizvoljan sistem sila uravnotežen.

b) $\vec{F}_R = 0; \quad \vec{M}_o \neq 0$

i tada se sistem sila svodi na spreg sila.

c) $\vec{F}_R \neq 0; \quad \vec{M}_o = 0$ ili $\vec{F}_R \neq 0; \quad \vec{M}_o \neq 0; \quad cos\delta = 0$

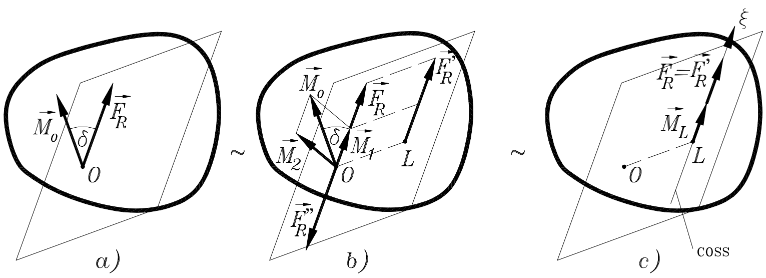
posmatrani sistem sila svodi se na rezultantu.

II) $\vec{F}_R \cdot \vec{M}_o = F_R M_o cos\delta \neq 0$

$$\vec{F}_R \neq 0; \quad \vec{M}_o \neq 0; \quad cos\delta \neq 0$$

tada se sistem sila svodi na dinamu ili na krst sila.

Svođenje prostornog sistema sila na dinamu



a) b) c)

$$\vec{M}_o = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_1, \vec{M}_2)$$

$$F_R = F'_R = F''_R$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_1; \vec{F}'_R, \vec{F}''_R)$$

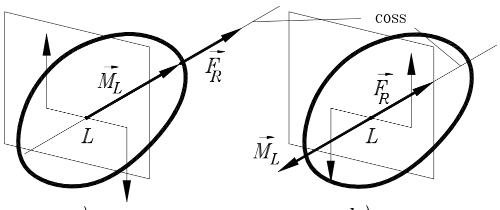
$$\vec{F}_R = \vec{F}'_R = -\vec{F}''_R \quad \overline{OL} = \frac{M_2}{F_R}$$

$$(\vec{F}_R, \vec{F}''_R) \sim 0$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}'_R; \vec{M}_1)$$

$$M_{1\xi} = M_o cos\delta$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_L)$$



a) b)

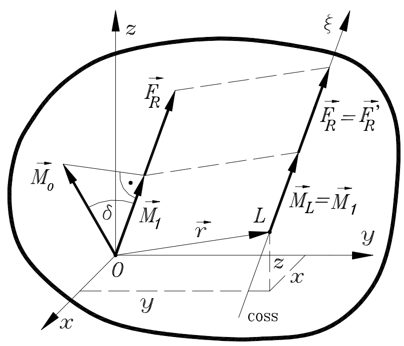
U tom slučaju kaže se da je sistem sila sveden na dinamu $(\vec{F}_R; \vec{M}_L)$, pri čemu se ta dva kolinearna vektora nalaze na osi udaljenoj u odnosu na tačku *O* za rastojanje

$$\overline{OL} = \frac{M_o sin\delta}{F_R}$$

Ova osa naziva se centralna osa sistema sila (coss).

Zavisno od toga da li su kolinearni vektori $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_L$ istog ili suprotnih smerova, razlikuju se desna i leva dinama.

Jednačina centralne ose sistema sila.



$$\vec{M}_L = \vec{M}_o + \overrightarrow{LO} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{M}_L = p\vec{F}_R$$

gde je p - parametar dinamе

$$p = \frac{M_{L\xi}}{F_R}$$

$$p\vec{F}_R = \vec{M}_o - \overrightarrow{OL} \times \vec{F}_R$$

$$\vec{F}_R = X_R\vec{i} + Y_R\vec{j} + Z_R\vec{k},$$

$$\vec{M}_o = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OL} = \vec{r}_L = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$p(X_R\vec{i} + Y_R\vec{j} + Z_R\vec{k}) = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} - (yZ_R - zY_R)\vec{i} - \\ -(zX_R - xZ_R)\vec{j} - (xY_R - yX_R)\vec{k}$$

$$pX_R = M_x - (yZ_R - zY_R)$$
$$pY_R = M_y - (zX_R - xZ_R)$$
$$pZ_R = M_z - (xY_R - yX_R).$$

Jednačina centralne ose sistema sila

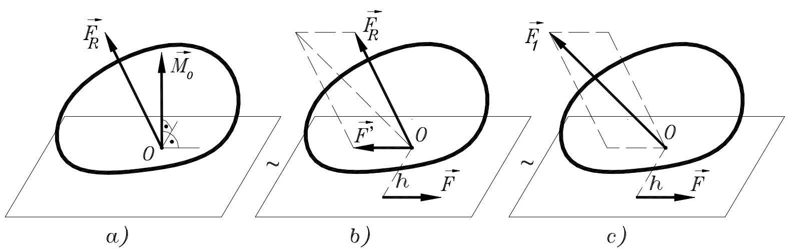
$$\frac{M_x - (yZ_R - zY_R)}{X_R} = \frac{M_y - (zX_R - xZ_R)}{Y_R} = \frac{M_z - (xY_R - yX_R)}{Z_R} = \frac{M_{L\xi}}{F_R}$$

pri čemu $M_{L\xi}$ predstavlja drugu statičku invarijantu.

Jednačina napadne linije rezultante

$$\frac{M_x - (yZ_R - zY_R)}{X_R} = \frac{M_y - (zX_R - xZ_R)}{Y_R} = \frac{M_z - (xY_R - yX_R)}{Z_R} = 0,$$

7.3.5. Svođenje prostornog sistema sila na krst sila



Kada su glavni vektor $\vec{F}_R$ i glavni moment $\vec{M}_o$ datog sistema sila različiti od nule i ako ugao između njih nije 90^o, tada se posmatrani sistem sila, umesto na dinamu, može svesti i na krst sila

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_R, \vec{F}, \vec{F}')$$

$$h = \frac{M_o}{F}$$

$$\vec{F}_R + \vec{F}' = \vec{F}_1$$

$$(\vec{F}_R; \vec{M}_o) \sim (\vec{F}_1, \vec{F})$$

pri čemu sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}$ ne pripadaju istoj ravni. Ovakav sistem sila $(\vec{F}_1, \vec{F})$ naziva se krst sila.

Postavlja se pitanje kada će krst sila biti ekvivalentan nuli, tj. kada će važiti

$$(\vec{F}_1, \vec{F}) \sim 0$$

Na osnovu prve aksiome, prethodni uslov biće ispunjen ako:

a) sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}$ zadovoljavaju jednakost

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}$$

b) sile imaju zajedničku napadnu liniju.

Uslov ***a)***:

$$\vec{F}_R + \vec{F}' + \vec{F} = 0$$

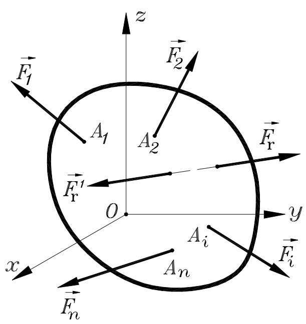
što se, s obzirom na činjenicu da za sile sprega važi $\vec{F}' = -\vec{F}$, $\vec{F}_R = 0$.

Uslov ***b)***: Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}$ imaće zajedničku napadnu liniju ako sila $\vec{F}$ prolazi kroz redukcionu tačku *O*. To znači da je tada $h = 0$, što odgovara uslovu $\vec{M}_o = 0$.

Ova razmatranja treba kompletirati pokazivanjem da su uslovi $\vec{F}_R = 0$ i $\vec{M}_o = 0$ dovoljni za ravnotežu posmatranog sistema sila. Polazeći od toga da su ispunjeni ovi uslovi treba pokazati da je tada posmatrani sistem uravnotežen. Kako je u ovom slučaju ispunjeno $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim (\vec{F}_R; \vec{M}_o)$, neposredno sledi da važi

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim 0.$$

Varinjonova teorema o momentu rezultante proizvoljnog prostornog sistema sila



Teorema: *Moment rezultante prostornog sistema sila za proizvoljnu tačku jednak je vektorskom zbiru momenata svih sila za tu istu tačku.*

Dokaz: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n) \sim \vec{F}_r$

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n, \vec{F}_r^1) \sim 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i) + \vec{M}_o(\vec{F}_r^1) = 0$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}_r^1) = -\vec{M}_o(\vec{F}_r)$$

$$\vec{M}_o(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_o(\vec{F}_i)$$

Specijalni slučaj *Varinjonove* teoreme

$$M_{ox}(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^{n} M_{ox}(\vec{F}_i)$$

Moment rezultante prostornog sistema sila, za neku osu, jednak je zbiru projekcija momenata svih sila za tu osu.

Teorema: *Moment rezultante prostornog sistema sila za proizvoljnu tačku jednak je glavnom momenatu tog sistema sila za istu momentnu tačku.*

Korišćenjem prethodno formulisane teoreme može se dokazati da spreg sila nema rezultantu. Glavni moment sprega sila ($\sum_{i=1}^{2} \vec{M}_o(\vec{F}_i)$) različit je od nule i ne zavisi od izbora redukcione tačke. Ako se pretpostavi da spreg sila ima rezultantu, tada je

$$\vec{M}_o(\vec{F}_r) = \sum_{i=1}^{2} \vec{M}_o(\vec{F}_i)$$

S obzirom da prethodna teorema važi za proizvoljno izabranu momentnu tačku, može se uzeti da se tačka *O* nalazi na napadnoj liniji rezultante. U tom slučaju leva strana prethodnog izraza jednaka je nuli dok je njegova desna strana različita od nule. Ova kontradiktornost je posledica pogrešne pretpostavke o postojanju rezultante sprega sila. Dakle, spreg sila nema rezultantu.