Рада Мутавџић Ђукић

1 Редови - наставак

1.1 Задаци за вежбу

Пример 1.1. Испитати да ли дати ред конвергира и ако је то случај наћи његову суму:
а) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}})$.

а) Општи члан не тежи нули, па је дати ред дивергентан. Заиста,

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+1}\right) = \ln\frac{1}{2} \neq 0.$$

б) Распишимо суму првих n чланова датог реда:

$$S_n = (e^1 - e^{\frac{1}{2}}) + (e^{\frac{1}{2}} - e^{\frac{1}{3}}) + \cdots + (e^{\frac{1}{n-1}} - e^{\frac{1}{n}}) + (e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}) = e - e^{\frac{1}{n+1}}.$$

Дакле, ред конвергира и његова сума је $S = \lim_{n\to\infty} S_n = e - 1$.

Пример 1.2. Испитати за које $p \in \mathbb{R}$ ред $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$ конвергира.

Користимо Стирлингову формулу $n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$, па за општи члан важи

$$a_n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n} e^n}{n^n n^p} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}.$$

Како ред чији је општи члан $\frac{1}{n^q}$ конвергира за $q > 1$, следи да полазни ред конвергира за $p - \frac{1}{2} > 1$, тј. за $p > \frac{3}{2}$.

Пример 1.3. Испитати конвергенцију реда: а) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{a} - 1)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin\frac{1}{7^n}$.

а) Нека је $a_n = \sqrt[n]{a} - 1$ и $b_n = \frac{1}{n}$. Како је $\lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n}-1}{1/n} = \ln a$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ је дивергентан, такав је и полазни ред према другом поредбеном критеријуму.

б) Нека је $a_n = 3^n \sin\frac{1}{7^n}$ и $b_n = \left(\frac{3}{7}\right)^n$. Тада је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(1/7^n)}{1/7^n} = 1$, а како је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n$ конвергентан (геометријски ред $\sum q^n$ за $|q| < 1$), такав је и полазни ред (према другом поредбеном критеријуму).

Пример 1.4. Испитати конвергенцију следећих редова: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n^2+1)}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2+n+1}$.

а) Функција $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ је непрекидна, опадајућа и позитивна за $x \in [2, \infty)$, па је дати ред еквиконвергентан несвојственом интегралу

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to\infty} (\ln(\ln x))\Big|_2^b = \infty,$$

одакле следи да је ред дивергентан.

б) Нека је $a_n = \frac{1}{n\ln(n^2+1)}$ и $b_n = \frac{1}{n\ln n}$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n^2+1)} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{2n/(n^2+1)} = \frac{1}{2},$$

па на основу другог поредбеног критеријума ред је дивергентан, јер је такав и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (део под а)).

в) Приметимо прво да је $a_n = \frac{\ln n}{n^2+n+1} < \frac{\ln n}{n^2} = b_n$ за $n \geqslant 1$. Посматрајмо сада функцију $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Њен први извод је $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, па функција опада за $x > \sqrt{e}$. Дакле, на интервалу $[2, \infty)$ функција $f(x)$ је непрекидна, опадајућа и позитивна, па можемо уместо реда посматрати несвојствени интеграл

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{\ln x}{x^2} = \begin{bmatrix} u = \ln x, & dv = dx/x^2, \\ du = dx/x, & v = -1/x \end{bmatrix} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_2^b + \int_2^b \frac{dx}{x^2}\right) = \frac{\ln 2 + 1}{2}.$$

Следи да је ред $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ конвергентан, па је на основу првог поредбеног критеријума такав и ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Пример 1.5. Испитати за које $p > 0$ дати ред конвергира: а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$, б) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} p^{\ln n}$.

а) За $0 < p \leqslant 1$ важи $\frac{1}{n(\ln n)^p} \geqslant \frac{1}{n \ln n}$, а како је раније показано да ред је ред $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ дивергентан, такав ће бити и полазни ред за $0 < p \leqslant 1$.

Нека је $p > 1$. Посматрамо функцију $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^p}$. Њен извод је $f'(x) = -\frac{p+\ln x}{x^2(\ln x)^{p+1}} < 0$ за $x > e^{-p}$. Како је функција $f(x)$ опадајућа и позитивна за $x \geqslant 2$, можемо користи интегрални критеријум, тј. посматрати интеграл

$$\lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^p},$$

који је за $p > 1$ конвергентан (решава се сменом $\ln x = t$), па је под тада конвергентан и полазни ред.

Пример 1.6. Испитати конвергенцију реда: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin^2 n$.

а) Нека је $a_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt[3]{n}}$ и $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$. Тада је $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, па како је ред $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергентан, такав је и полазни ред.

б) Општи члан $a^n \sin^2 n$ ће тежити нули кад $n \to \infty$ за $|a| < 1$ ($\lim_{n\to\infty} \sin n$ не постоји, јер $\sin n$ осцилује - не тежи једном броју, али је $\sin^2 n \leqslant 1$, па је $\lim_{n\to\infty} a^n \sin^2 n = 0$ ако низ a_n тежи нули). Сада је $a^n \sin^2 n \leqslant a^n$, што је општи члан геомтеријског реда који је конвергентан за $|a| < 1$, па је тада конвергентан и полазни ред, према првом поредбеном критеријуму.

Пример 1.7. Испитати конвергенцију реда: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 3^{n/2}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{n2^n-1}$.

а) Упоредимо другим поредбеним критеријумом општи члан датог реда, $a_n = \frac{1}{2^n - 3^{n/2}}$ са $b_n = \frac{1}{2^n}$, што је општи члан конвергентног геометријског реда. Рачунамо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - 3^{n/2}} \cdot \frac{2^{-n}}{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - (\sqrt{3}/2)^n} = 1,$$

па је и полазни ред конвергентан.

б) Приметимо да је $a_n = \frac{2^n+1}{n2^n-1} > \frac{2^n+1}{n2^n} = b_n$ и $b_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n2^n}$. Ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ је хармонијски, који је дивергентан, а за општи члан реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ важи $\frac{1}{n2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$, што је општи члан геометријског реда који је конвергентан ($\sum q^n$ за $|q| < 1$), па је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ конвергентан. Дакле, ред $\sum b_n$ је дивергентан као збир конвергентног и дивергентног реда, а како је полазни ред већи од њега ($a_n > b_n$), он је такође дивергентан.

Пример 1.8. Испитати конвергенцију реда: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$.

Приметимо да општи члан тежи нули за $|a| \leqslant 1$ и да је $|\frac{a^n}{n}| \leqslant |a|^n$ за $n \geqslant 1$, што је општи члан геометријског реда који је конвергентан за $|a| < 1$. За $a = 1$ ред се своди на хармонијски ред, који је дивергентан.

Пример 1.9. Испитати конвергенцију реда: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha+1}$.

а) Према Лајбницовом критеријуму, довољан услов да ред конвергира је да низ $1/\ln n$ монотоно тежи нули за $n \geqslant 2$. Како је тај услов испуњен, ред конвергира. Ипак, дати ред не конвергира апсолутно, јер је $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, што је општи члан хармонијског реда, који је дивергентан.

б) Према Лајбницовом критеријуму, ред ће конвергирати за $\alpha > 0$. Како ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$, а $\frac{1}{n^\alpha+1} < \frac{1}{n^\alpha}$, то полазни ред конвергира апсолутно за $\alpha > 1$.