Машински факултет, Београд 14.11.2022.

Први колоквијум из Математике 1 - смене 2 и 4

Група А

1. Решити матричну једначину $A - E = X(A^{-1} + E)$, где је $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Дискусијом по $a \in \mathbb{R}$ решити систем једначина $\begin{aligned} x \quad\quad - az &= 1 \\ x - y + z &= 2 - a \\ (a+1)x - 2y + 2z &= 2. \end{aligned}$

3. Дате су праве $p : x = 3t + 2, y = t + 4, z = -t - 1$, $q : x = s - 3, y = -2s + 1, z = -4$ и раван $\pi : -x + 4z = 3$. (а) Наћи раван β која садржи праву p и ортогонална је на π. (б) Наћи продор праве q кроз раван β.

4. Наћи тачку A која припада правој $p : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$, а од праве $q : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ је удаљена за $\sqrt{26}$.

Решења.

1. Множењем дате матричне једначине са $(A^{-1}+E)^{-1}$ са десне стране добијамо $X = (A-E)(A^{-1}+E)^{-1}$. Ипак, задатак се може решити и једноставније: ако једначину $A - E = X(A^{-1} + E)$ помножимо са A са десне стране добијамо $A^2 - A = X(E + A)$, одакле је $X = (A^2 - A)(A + E)^{-1}$.

Ако се ради на први начин, треба наћи $\det A = -\frac{1}{3}$ и $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -4 & 11 & -10 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -4 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$. Даље је $M = A^{-1} + E = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7 & -11 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $\det M = \frac{10}{3}$ и $\operatorname{adj} M = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 3 & -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{13}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} & 2 \end{bmatrix}$, $M^{-1} = \frac{1}{\det M}\operatorname{adj} M$. Коначно је $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$ и $X = (A - E)M = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 7 & -23 & -11 \\ 7 & -23 & -11 \end{bmatrix}$.

2. Потребне детерминанте су $\Delta = a(1-a)$, $\Delta_x = 2a(1-a)$, $\Delta_y = (1-a)(a^2+1)$ и $\Delta_z = 1-a$. За $a \notin \{0, 1\}$ систем има јединствено решење $(x, y, z) = \left(2, \frac{a^2+1}{a}, \frac{1}{a}\right)$; за $a = 0$ систем нема решења, а за $a = 1$ систем има бесконачно много решења облика $(x, y, z) = (2, 2t - 2, t - 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Права p се може написати у облику $p = P + t\vec{p}$, $P(2, 4, -1)$, $\vec{p} = (3, 1, -1)$. Тражена раван β садржи нпр. тачку P и нормална ја на вектор $\vec{n}_\beta = \vec{p} \times \vec{n}_\pi$, где је $\vec{n}_\pi = (-1, 0, 4)$ нормала на раван π. Дакле, $\vec{n}_\beta = (4, -11, 1)$, па је раван β дата једначином $4(x - 2) - 11(y - 4) + z + 1 = 0$, тј. $4x - 11y + z + 37 = 0$. Даље, продор праве q кроз раван β, рецимо тачку S, добијамо као решење система који чине параметарска једначина праве q и раван β: заменом параметраске једначине праве p у једначини равни β добијамо $4(s - 3) - 11(-2s + 1) - 4 + 37 = 0$, одакле је $s = -\frac{5}{13}$. Дакле, $S\left(-\frac{44}{13}, \frac{23}{13}, -4\right)$.

4. Тражена тачка A лежи на правој p, па је облика $A(3t + 1, -t - 1, 1)$; права q се може написати као $q : Q + t\vec{q}$, $Q(3, -1, -2)$, $\vec{q} = (2, -2, 1)$. Растојање од A до q налазимо као висину паралелограма кад векторима $\overline{QA}$ и $\vec{q}$, у односу на основу $\vec{q}$. Дакле,

$$\frac{\sqrt{26}}{3} = \frac{|\overline{QA} \times \vec{q}|}{|\vec{q}|} = \frac{|(-t + 6, -3t + 8, -4t + 4)|}{3},$$

одакле квадрирањем добијамо $\frac{26}{9} = 26t^2 - 92t + 116$, тј. $13t^2 - 46t - 59 = (t + 1)(13t - 59) = 0$. Дакле, $t = -1$ или $t = \frac{59}{13}$, па имамо две такве тачке: $A(-2, 0, 1)$ или $A\left(\frac{190}{13}, -\frac{72}{13}, 1\right)$.