

### 3 Системи линеарних једначина

Посматрајмо систем од  $m$  линеарних једначина са  $n$  непознатих  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \quad (3.1)$$

или, у матричном облику

$$AX = B, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

где је  $A$  матрица система,  $B$  колона слободних чланова и  $X$  колона непознатих.

Решење овог система је уређена  $n$ -торка бројева  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , чијом заменом у полазни систем једначине система постају тачне једнакости. Кажемо да је систем:

- (1) *сагласан* (решив), ако има бар једно решење;
- (1а) *одређен*, ако има јединствено решење;
- (1б) *неодређен*, ако има бесконачно много решења;
- (2) *несагласан* (нерешив), ако нема решења.

Ако је  $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ , систем зовео *хомогеним* и такав систем увек има (тривијално) решење  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$ .

Поред матрице система  $A$ , посматра се још и *проширена матрица система*:

$$[A|B] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right].$$

#### 3.1 Решавање система једначина матричним методом

Ако квадратни систем линеарних једначина запишемо у облику матричне једначине  $AX = B$ , тада је у случају да је  $\det A \neq 0$  решење система једначина  $X = A^{-1}B$ .

**Пример 3.1.** Матричним методом решити систем једначина

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 8 \\ -2x + y + z &= -5 \\ 4x - y - 3z &= 7. \end{aligned}$$

Напишимо полазни систем у облику матричне једначине  $AX = B$ . Тада је

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Инверзна матрица матрице  $A$  је  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 11 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ , па је  $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ .

### 3.2 Гаусов метод елиминације

Гаусов метод елиминације се састоји у примени трансформација које не мењају решење система (преводе га у еквивалентан систем) да би елиминисали једну по једну променљиву из система. Трансформације које не мењају решење система су:

- (1) замена места две једначине система;
- (2) множење једне једначине система ненула бројем;
- (3) множење једне једначине система неким бројем и додавање некој другој једначини система.

Применом наведених трансформација произвољан систем се може свести на неки систем у канонском облику. тј. систем код кога је проширена матрица квази-троугаона:

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{rn} & \beta_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Овакав систем ће имати решење ако и само ако је  $\beta_{r+1} \neq 0$  (иначе ће постојати једначина облика  $0 = 1$ ). У том случају променљиве  $x_i$  налазимо „враћањем уназад”, тако што прво изразимо променљиву из последње једначине, затим ту вредност убацимо у претпоследњу итд.

$$x - y + 2z = 8$$

**Пример 3.2.** Решити систем једначина  $-2x + y + z = -5$  Гаусовим методом.

$$4x - y - 3z = 7$$

Трансформације система ћемо пратити на проширеној матрици система (трансформације су само над врстама да се не би променило решење система). Означимо  $i$ -ту врсту матрице са  $V_i$ , замену места  $i$ -те и  $j$ -те врсте са  $V_i \leftrightarrow V_j$ , множење са  $k$   $i$ -те врсте са  $kV_i$  и операцију додавања  $j$ -те врсте помножене са  $k$   $i$ -тој врсти са  $V_i + kV_j$ . Рачунамо

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & -3 & 7 \end{array} \right] \xrightarrow[V_3 - 4V_1]{V_2 + 2V_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & 5 & -11 \\ 0 & 3 & -11 & -25 \end{array} \right] \xrightarrow{V_3 + 3V_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{-1} & 5 & -11 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 8 \end{array} \right].$$

Из треће једначине добијамо да је  $z = 2$ . Ако то уврстимо у другу једначину добијамо  $-y + 5 \cdot 2 = -11$ , одакле је  $y = -1$ . Коначно, када добијене вредности за  $z$  и  $y$  уврстимо у прву једначину добијамо  $x - (-1) + 2 \cdot 2 = 8$ , одакле је  $x = 3$ . Дакле, решење система је  $(x, y, z) = (3, -1, 2)$ .

### 3.3 Кронекер-Капелијев став

У систему једначина (3.1) означимо са  $r(A)$  ранг матрице система, са  $r([A|B])$  ранг проширене матрице система и нека је  $n$  број непознатих. Критеријум за решивост система линеарних једначина нам даје наредно тврђење.

**Теорема 3.1.** (Кронекер-Капелијев став) Систем линеарних једначина је сагласан ако и само ако је  $r(A) = r([A|B])$ . Даље, ако је  $r(A) = r([A|B]) = n$  систем има јединствено решење, а ако је  $r(A) = r([A|B]) = k < n$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , систем има бесконачно много решења ( $n - k$  променљивих узима произвољне вредности, а остале променљиве се изражавају преко њих).

**Пример 3.3.** Испитати сагласност система једначина

$$\begin{aligned} x + m^2 y &= -m - m^3 \\ x + m^3 y &= -m^2 - m^3 \\ x + m y &= -m^2 - m. \end{aligned}$$

Прво сводимо проширену матрицу система на квази-троугаону:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & m^2 & -m - m^3 \\ 1 & m^3 & -m^2 - m^3 \\ 1 & m & -m^2 - m \end{array} \right] \xrightarrow[V_3 \sim V_1]{V_2 - V_1} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & m^2 & -m - m^3 \\ 0 & m^3 - m^2 & m - m^2 \\ 0 & m - m^2 & m^3 - m^2 \end{array} \right] \xrightarrow[V_3 + m V_2]{V_2 \leftrightarrow V_3} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & m^2 & -m - m^3 \\ 0 & m - m^2 & m^3 - m^2 \\ 0 & 0 & m(m-1)^2(m+1) \end{array} \right].$$

Последњи корак важи под условом да је  $m \neq 0$ . Разликујемо четири случаја.

- (1) Ако је  $m \neq 0$  и  $m \neq \pm 1$  ранг матрице система је 2, а ранг проширене матрице система је 3, па систем нема решења.
- (2) Ако је  $m = 0$  проширена матрица система се своди на

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

па је ранг матрице система 1 и једнак је рангу проширене матрице система, па систем има решење. Како је тај број мањи од броја непознатих 2, систем има бесконачно много решења.

- (3) Ако је  $m = 1$  проширена матрица постаје

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

па је одговор исти као у претходном случају.

- (4) Ако је  $m = -1$  проширена матрица је

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Видимо да се ранг матрице система поклапа са рангом проширене матрице система и да је у овом случају тај број једнак броју непознатих (2), па систем има јединствено решење.

### 3.4 Крамерово правило

Квадратне системе (код којих је број једначина једнак броју непознатих) можемо решати помоћу Крамеровог правила. Дакле, нека је дат систем једначина облика (3.1) при чему је  $m = n$ . Треба израчунати *детерминанту система*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и *детерминанте променљивих*

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Разликујемо три случаја.

- (1) Ако је  $\Delta \neq 0$  систем има јединствено решење  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}\right)$ .
- (2) Ако је  $\Delta = 0$  и бар једна од детерминанти  $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$  није нула, систем нема решења.
- (3) Ако је  $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \dots = \Delta_{x_n} = 0$ , систем или има бесконачно много решења или нема решења (помоћу Крамеровог правила не можемо добити прецизнији одговор). Тада систем решавамо Гаусовим методом елиминације.

**Пример 3.4.** Решити систем једначина 
$$\begin{aligned} x + ay + z &= -2 \\ ax + y + z &= 1 \\ x - 4y - z &= 8. \end{aligned}$$

Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Нађимо потребне детерминанте:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \end{vmatrix} = (a-1)(a-2), & \Delta_x &= \begin{vmatrix} -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 8 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 9(a-2), \\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 6(a-2), & \Delta_z &= \begin{vmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 8 \end{vmatrix} = -(a-2)(8a+7). \end{aligned}$$

- (1) Ако је  $a \neq 1$  и  $a \neq 2$  систем има јединствено решење  $(x, y, z) = \left(\frac{9}{a-1}, \frac{6}{a-1}, \frac{8a+7}{1-a}\right)$ .
- (2) Ако је  $a = 1$  систем нема решења.
- (3) Ако је  $a = 2$  систем решавамо Гаусовим методом елиминације:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -1 & 8 \end{array} \right] \xrightarrow[V_3 \sim V_1]{V_2 \sim 2V_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & -6 & -2 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{V_3 \sim 2V_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & \boxed{-1} & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Решење система је  $(x, y, z) = (3 + t, t, -5 - 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

### 3.5 Задаци

1. Решити систем једначина
- $$\begin{aligned} -x + y - az + u &= 0 \\ x - y + z - au &= 0 \\ 2x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Решење. Ако прву једначину додамо другој, а затим прву једначину помножимо са два и додамо трећој једначини, добијамо (еквивалентан) систем

$$\begin{aligned} \boxed{-x} + y - az + u &= 0 \\ \boxed{(1-a)z} + (1-a)u &= 0 \\ \boxed{3y} + (1-2a)z + 2u &= 1 \end{aligned}$$

- (1) Ако је  $a \neq 1$ , променљиве  $x$ ,  $y$  и  $z$  су везане, а променљива  $u$  је слободна, па је  $u = t, t \in \mathbb{R}$ . Из друге једначине изражавамо  $z$ , из треће  $y$ , а из прве  $x$  и добијамо решење  $(x, y, z, u) = (\frac{1}{3} + \frac{t}{3}(a+2), \frac{1}{3} - \frac{t}{3}(2a+1), -t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- (2) Ако је  $a = 1$ , променљиве  $x$  и  $y$  су везане, а променљиве  $z$  и  $u$  су слободне. Узимамо да је  $z = t, u = s, t, s \in \mathbb{R}$  и налазимо решење  $(x, y, z, u) = (\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}s, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}s, t, s)$ ,  $t, s \in \mathbb{R}$ .

2. У зависности од параметара  $a$  и  $b$  решити систем једначина
- $$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ x + 2y + z &= -1 \\ 4x + 3y + az &= 0 \\ x - 3y + bz &= a - 2 \end{aligned}$$

Решење. Систем решавамо Гаусовим методом елиминације:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & a & 0 \\ 1 & -3 & b & a-2 \end{array} \right] & \xrightarrow{V_2 \leftrightarrow V_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & a & 0 \\ 1 & -3 & b & a-2 \end{array} \right] & \xrightarrow[V_4 \sim V_1]{V_2 \sim 2V_1, V_3 \sim 3V_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 1 & 4 \\ 0 & -5 & a-4 & 4 \\ 0 & -5 & b-1 & a-1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[V_4 \sim V_2]{V_3 \sim V_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 1 & 4 \\ 0 & 0 & a-5 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & a-5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

- (1) За  $a \neq 5$  настављамо процес елиминације тако што množимо трећу једначину са  $\frac{2-b}{a-5}$  и додајемо је четвртој једначини. Тада се систем своди на степенасти систем

$$\begin{aligned} \boxed{x} + 2y + z &= -1 \\ \boxed{-5y} + z &= 4 \\ \boxed{(a-5)z} &= 0 \\ 0 &= a-5 \end{aligned}$$

Последња једначина система је у контрадикцији са претпоставком  $a \neq 5$ , па у овом случају систем нема решења.

- (2) За  $a = 5$  систем је еквивалентан систему

$$\begin{aligned} \boxed{x} + 2y + z &= -1 \\ \boxed{-5y} + z &= 4 \\ \boxed{(b-2)z} &= 0 \end{aligned}$$

Даље разликујемо два подслучаја.

- (2а) Ако је  $b \neq 2$  систем има јединствено решење  $(x, y, z) = (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0)$ .

- (2б) Ако је  $b = 2$  променљива  $z$  је слободна:  $z = t, t \in \mathbb{R}$ , а остале променљиве се изражавају преко ње. Решење је  $(x, y, z) = (\frac{3}{5} - \frac{7}{5}t, -\frac{4}{5} + \frac{1}{5}t, t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

3. Решити систем једначина
- $$\begin{aligned} x + ay + z &= -2 \\ ax + y + z &= 1 \\ x - 4y - z &= 8 \\ 7x + 8y + 5z &= -2a \end{aligned}$$

Решење. У примеру 3.4 смо нашли решење система који чине прве три једначине овог система и преостаје да видимо да ли то решење задовољава четврту једначину система.

За  $a \neq 1$  и  $a \neq 2$  систем коју чине прве три једначине полазног система има јединствено решење  $(x, y, z) = \left(\frac{9}{a-1}, \frac{6}{a-1}, \frac{8a+7}{1-a}\right)$ . Када то решење уврстимо у четврту једначину добијамо  $7 \cdot \frac{9}{a-1} + 8 \cdot \frac{6}{a-1} + 5 \cdot \frac{8a+7}{1-a} = -2a$ , тј.  $a^2 - 21a + 38 = 0$ , одакле је  $a = 19$  (претпоставили смо да је  $a \neq 2$ ).

Дакле, за  $a = 19$  решење система је  $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{53}{6}\right)$ .

Нека је  $a = 2$ . Када решење прве три једначине  $(x, y, z) = (3 + t, t, -5 - 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  уврстимо у четврту једначину добијамо  $7(3 + t) + 8t + 5(-5 - 3t) = -4$ , тј.  $0 = 0$ , па систем има бесконачно много решења:  $(x, y, z) = (3 + t, t, -5 - 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

За  $a = 1$  систем који чине прве три једначине датог система нема решења, па и цео систем нема решења. Дакле, за  $a \neq 2$  и  $a \neq 19$  систем нема решења.

$$\begin{array}{rcl} x - & 2y - & z = 3 \\ 2x - & y + & z = -a \\ 4. \text{ Испитати сагласност система једначина } & 3x + (a-1)y + 3z = & 1 \\ & ax + & y + 2z = 2 \end{array}$$

Решење. Можемо користити Кронекер-Капелијев став, па нађимо ранг матрице система  $A$  и проширене матрице система  $[A|B]$ . Како рачунамо само ранг, можемо вршити и трансформације над колонама. Означимо  $i$ -ту колону матрице са  $K_i$ , а  $i$ -ту врсту и трансформације матрице као у претходним примерима. Рачунамо

$$\begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -a \\ 3 & a-1 & 3 & 1 \\ a & 1 & 2 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{K_3 \leftrightarrow K_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -a \\ 3 & a-1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & a & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{V_2+V_1 \\ V_3+3V_1 \\ V_4+2V_1}} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3-a \\ 0 & a-7 & 6 & 10 \\ 0 & -3 & a+2 & 8 \end{array} \right] \\ V_3 + \frac{a-7}{3}V_2 \xrightarrow{V_4 - V_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & a-1 & \frac{1}{3}(-a^2+10a+9) \\ 0 & 0 & a-1 & a+5 \end{array} \right] \xrightarrow{V_4 \leftrightarrow V_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a+5 \\ 0 & 0 & a-1 & \frac{1}{3}(-a^2+10a+9) \end{array} \right] \end{array}$$

За  $a = 1$  је  $r(A) = 2$  и  $r([A|B]) = 3$ , па систем нема решења.

За  $a \neq 1$  настављамо поступак свођења матрице на квази-троугаону одузимањем треће врсте од четврте и добијамо матрицу

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3-a \\ 0 & 0 & a-1 & a+5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}(a-1)(a-6) \end{array} \right]$$

Овде је  $r(A) = 3$ , а  $r([A|B])$  је 3 за  $a = 6$  и систем тада има јединствено решење, односно 4 за  $a \neq 6$  и систем тада нема решења.

$$\begin{array}{rcl} & 2x - (a-1)y + 2z = & 1 \\ 5. \text{ Решити систем једначина } & x - & y - az = 2 \\ & x + & 3y + z = a. \end{array}$$

Решење. Систем можемо решити помоћу Крамеровог правила. Рачунамо детерминанте

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -a+1 & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 6a + 5 = (a+1)(a+5),$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -a+1 & 2 \\ 2 & -1 & -a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^3 - a^2 + 7a + 9 = (a+1)(a^2 - 2a + 9),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2a^2 + a - 1 = (a+1)(2a-1),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -a+1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 - 5a - 6 = (a+1)(a-6).$$

- (1) Ако је  $\Delta \neq 0$ , тј. ако је  $a \neq -1$  и  $a \neq -5$  систем има јединствено решење  $(x, y, z) = \left( \frac{a^2-2a+9}{a+5}, \frac{2a-1}{a+5}, \frac{a-6}{a+5} \right)$ .
- (2) Ако је  $a = -5$  систем нема решења.
- (3) Ако је  $a = -1$  систем решавамо Гаусовим методом елиминације

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{V_2 \leftrightarrow V_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[V_3 \sim V_1]{V_2 - 2V_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{array} \right] \xrightarrow{V_3 \sim V_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Можемо узети да је променљива  $z$  слободна:  $z = t, t \in \mathbb{R}$ . Из друге једначине је  $y = -\frac{3}{4}$ , а из прве  $x = \frac{5}{4} - t$ . Дакле, систем је (једноструко) неодређен и његово решење је  $(x, y, z) = \left( \frac{5}{4} - t, -\frac{3}{4}, t \right), t \in \mathbb{R}$ .