Рада Мутавџић Ђукић

1 Бројни редови - допуна

Теорема 1.1. (Оцена остатка за интегрални тест) Нека је $f(k) = a_k$, где је f непрекидна, опадајућа и позитивна функција за $x \geqslant n$ и ред $\sum a_n$ је конвергентан. Тада за остатак реда $R_n = S - S_n$ важи

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)dx. \tag{1.1}$$

Пример 1.1. (а) Апроксимирати суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ помоћу првих 10 чланова. Проценити грешку те апроксимације.
(б) Колико чланова је потребно да би апроксимација била тачна до на 0.0005?

(а) Функција $f(x) = \frac{1}{x^3}$ задовољава услове за интегрални тест, па посматрамо интеграл $\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2}$. Тражена апроксимација је

$$S_{10} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{10^3} \approx 1.1975,$$

а на основу теореме 1.1 је

$$R_{10} \leqslant \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{200},$$

па је грешка највише 0.005.

(б) Тачност 0.0005 значи да треба наћи n за које је $R_n \leqslant 0.0005$. Како је

$$R_n \leqslant \int_{n}^{\infty} \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2n^2},$$

треба да важи

$$\frac{1}{2n^2} < 0.0005, \quad \text{тј.} \quad n^2 > \frac{1}{0.001} = 1000, \quad \text{па је } n > \sqrt{1000} = 31.6.$$

Дакле, треба узети 32 члана да би се постигла тачност 0.0005.

Ако на свакој страни неједнакости (1.1) додамо S_n добијамо

$$S_n + \int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \leqslant S \leqslant S_n + \int_{n}^{\infty} f(x)dx. \tag{1.2}$$

На овај начин се добија тачнија апроксимација суме $S(x)$ од оне добијене парцијалном сумом $S_n(x)$.

Пример 1.2. Користећи формулу (1.2) за $n = 10$ проценити суму реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

Користимо процену

$$S_{10} + \int_{11}^{\infty} \frac{dx}{x^3} \leqslant S \leqslant S_{10} + \int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x^3}, \quad \text{тј.} \quad S_{10} + \frac{1}{2 \cdot 11^2} \leqslant S \leqslant S_{10} + \frac{1}{2 \cdot 10^2}.$$

Како је $S_{10} \approx 1.197532$ добијамо $1.201664 \leqslant S \leqslant 1.20253$. Ако проценимо S средином овог интервала, грешка није већа од половине интервала, па је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1.2021 \quad \text{са грешком } R < 0.0005.$$

Пример 1.3. Апроксимирати суму реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ тако да буде тачна на три децимале ($R < 0.001$).

Ред конвергира по Лајбницовом критеријуму, јер је низ $\frac{1}{n!}$ опадајући $\left(\frac{1}{n!} > \frac{1}{(n+1)!}\right)$ и тежи нули кад $n \to \infty$. Да бисмо видели колико чланова реда треба узети да би се добила тражена апроксимација, користимо својство да је

$$|R_n| = |S - S_n| \leqslant |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Дакле, треба да важи $\frac{1}{(n+1)!} < 0.001$, тј. $(n+1)! > 1000$. Како је $6! = 720$ и $7! = 5040$, треба апроксимирати ред са $S_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \approx 0.368056$ и тада за грешку апроксимације важи $|R_6| \leqslant \frac{1}{7!} < 0.0002$.

2 Функционални редови

Нека је дат низ функција $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ дефинисаних на интервалу $[a,b]$. Тада се бесконачна сума

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{2.1}$$

назива *функционални ред.*

За функционални ред кажемо да је *конвергентан* у тачки x_0, ако је бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} f(x_0)$ конвергентан, а скуп свих таквих тачака представља *област конвергенције* функционалног реда. Ред (2.1) је *апсолутно конвергентан* на неком интервалу, ако је на том интервалу конвергентан ред $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$.

m-та парцијална сума и m-ти остатак су $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} f_n(x)$ и $R_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x)$. Ако је ред конвергентан на интервалу $[a,b]$, важи да је $\lim_{x\to\infty} R_m(x) = 0$ за свако $x \in [a,b]$.

Дефиниција 2.1. (Униформна конвергенција) Функционални ред (2.1) је униформно конвергентан на интервалу $[a,b]$, ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (независно од тачке x) тако да важи

$$|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon, \qquad \text{тј.} \qquad S(x) - \varepsilon < S_n(x) < S(x) + \varepsilon.$$

за свако $n \geqslant n_0$ и свако $x \in [a,b]$.

Наредна теорема обезбеђује довољан услов за униформну конвергенцију.

Теорема 2.1. (Вајерштрасова теорема) Ако за свако $x \in [a,b]$ и свако $n \geqslant n_0$ важи

$$|f_n(x)| \leqslant a_n,$$

где је бројни ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан, тада је функционални ред (2.1) апсолутно и униформно конвергентан на $[a,b]$.

Пример 2.1. а) Показати да је ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ конвергентан; б) Испитати униформну конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$ на интервалу $(-\infty,\infty)$.

а) Приметимо да је

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} \leqslant \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2\cdots 2} = \frac{1}{2^n},$$

што је општи члан конвергентног геометријског реда, па је такав и полазни ред према првом поредбеном критеријуму.

б) Како је $\left|\frac{\sin nx}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и свако $x \in (-\infty,\infty)$, а ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ је конвергентан на основу дела под а), то полазни ред униформно конвергира на основу Вајерштрасовог критеријума за $x \in (-\infty,\infty)$.

Теорема 2.2. Нека је ред $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ униформно конвергентан на интервалу $[a,b]$, при чему су елементи $f_n(x)$ непрекидне функције. Тада важи

- сума S је такође непрекидна функција на интервалу $[a,b]$;
- $\displaystyle\int_{x_0}^{x} S(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$, тј. ред се може интегралити члан по члан од x_0 до x за свако $x_0, x \in [a,b]$.

Теорема 2.3. Ако сви чланови f_n конвергентног реда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имају непрекидне изводе и ако је ред $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ униформно конвергентан на интервалу $[a,b]$, тада у свакој тачки $x \in [a,b]$ важи $\displaystyle\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f'(x)$, тј. ред се може диференцирати члан по члан.

2.1 Степени редови

Степени ред је ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots, \tag{2.2}$$

где је x промељива, а константе c_n су коефицијенти реда. За свако фиксирано x, степени ред је бројни ред и можемо испитивати његову конвергенцију.

Сума реда је функција

$$S(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots,$$

чији је домен скуп свих тачака x за које ред (2.2) конвергира.

Примера ради, ако је $c_n = 1$ за свако n, степени ред (2.2) је геометријски ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

који је конвергентан за $x \in (-1, 1)$, а дивергентан иначе.

Општије, ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots \tag{2.3}$$

је степени ред у околини тачке a. Приметимо да су за $x = a$ сви чланови реда нула за $n \geqslant 1$, па је степени ред (2.3) увек конвергентан за $x = a$.

Пример 2.2. Испитати за које x је степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ конвергентан.

За $x \neq 0$ је

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} (n+1)|x| = \infty,$$

па је ред конвергентан само за $x = 0$.

Пример 2.3. Испитати за које x је степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n}$ конвергентан.

За $x \neq 0$ је

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x-2|,$$

па је ред конвергентан за $|x-2| < 1$, тј. за $x \in (1,3)$. За $|x-2| > 1$ ред је дивергентан, а случајеве $x = 1$ и $x = 3$ морамо третирати одвојено.

За $x = 1$ ред се своди на $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, који је конвергентан према Лајбницовом правилу, а за $x = 3$ ред се своди на хармонијски ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$, који је дивергентан.

Дакле, дати степени ред је конвергентан за $x \in [1, 3)$.

Теорема 2.4. За дати степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ постоје само три могућности:

(i) ред конвергира само за $x = a$;

(ii) ред конвергира за свако x;

(ii) постоји позитиван број R тако да ред конвергира за $|x-a| < R$, а дивергира за $|x-a| > R$.

Број R из претходне теореме се назива *радијус конвергенције*. У случају (i) је $R = 0$, а у случају (ii) је $R = \infty$. Интервал конвергенције степеног реда је $x \in (a-R, a+R)$. У случају (iii) треба додатно испитати крајеве интервала конвергенције $x = a \pm R$.

Пример 2.4. Наћи радијус и интервал конвергенције степеног реда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.

Посматрамо количник

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| -3x \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} \right| \to 3x, \quad \text{када } n \to \infty.$$

Дакле, ред је конвергентан за $3|x| < 1$, тј. за $|x| < \frac{1}{3}$, па је радијус конвергенције $R = \frac{1}{3}$. Знамо да је дати ред конвергентан за $x \in (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, али морамо проверити тачке $x = \pm\frac{1}{3}$. За $x = -\frac{1}{3}$ ред се своди дивергентан ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ за $p \leqslant 1$). За $x = \frac{1}{3}$ ред постаје $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, који је конвергентан према Лајбницовом критеријуму. Следи да је интервал конвергенције датог степеног реда $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$.

На основу претходног примера, јасно је да се радијус конвергенције може наћи по формули

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Слично, на основу Кошојевог кореног критеријума, важи

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Теорема 2.5. Степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ полупречника конвергенције R конвергира апсолутно и униформно за $x \in [a-r, a+r]$, где је $0 < r < R$.

2.2 Представљање функција у облику степених редова

Одређени типови функција могу се представити у облику степеног реда коришћењем геометријских редова, или диференцирањем или интеграцијом таквих редова. Овај метод представљања функција је користан за интеграле који нису елементарно израчунљиви (када се примитивна функција не може изразити преко елеметарних функција), за решавање диференцијалних једначина и за апроксимацију функције полиномима.

Подсетимо се геометријског реда

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1. \tag{2.4}$$

Пример 2.5. Изразити $1/(1+x^2)$ као суму степенпг реда и наћи интервал конвергенције.

Ако у једначини (2.4) заменимо $-x$ са x^2 добијамо

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

и овај ред је конвергентан за $|-x^2| < 1$, тј. за $|x| < 1$. Дакле, интервал конвергенције је $(-1, 1)$.

Пример 2.6. Представити у облику степеног реда функцију $f(x) = x^3/(x+2)$.

$$\frac{x^3}{x+2} = \frac{x^3}{2}\frac{1}{1-(-x/2)} = \frac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^{n+3} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-2}}x^n.$$

Диференцирање и интеграција степеног реда

Знамо да је за коначне суме извод (односно интеграл) суме једнак суми извода (односно интеграла). У наредној теореми дати су услови када исто важи за бесконачну суму, у случају степених редова.

Теорема 2.6. Нека је дат степени ред $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ полупречника конвергенције R. Тада је збир степеног реда

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

диференцијабилна (и зато непрекидна) функција на интервалу $(a-R, a+R)$ и важи

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots,$$

$$\int S(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} = C + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{3} + \cdots$$

(степени ред се унутар интервала конвергенције може диференцирати и интегралити члан по члан). Радијуси конвергенција ових степених редова су такође R.

Иако према претходној теореми радијус конвергенције остаје исти када се степени ред диференцира или интеграли, не мора остати исти интервал конвергенције - треба проверити крајеве интервала.

Пример 2.7. Представити функцију $1/(1-x)^2$ у облику степеног реда и наћи радијус конвергенције.

Диференцирањем обе стране једнакости (2.4) добијамо

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n,$$

а радијус конвергенције R је исти као радијус конвергенције полазног реда, дакле $R = 1$.

Пример 2.8. Представити функцију $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ у облику степеног реда.

Приметимо да је $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$, и да је $f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$. Иинтеграцијом обе стране једнакости (2.4) добијамо

$$\int \frac{dx}{1-x} = \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots.$$

Да бисмо нашли вредност константе C заменимо $x = 0$ у претходну једначину, одакле је $-\ln|1-0| = C$, па је $C = 0$. Слично је

$$\int \frac{dx}{1+x} = C + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots, \quad \text{и } C = 0.$$

Дакле,

$$f(x) = \int \frac{dx}{1+x} + \int \frac{dx}{1-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}, \qquad R = 1.$$

Пример 2.9. Развити функцију $f(x) = \operatorname{arctg} x$ у степени ред.

У примеру 2.5 је развијена функција $\frac{1}{1+x^2} = (\operatorname{arctg} x)'$, па ћемо решење добити интеграцијом тог развоја:

$$\operatorname{arctg} x = \int \frac{dx}{1+x^2} = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)dx = C + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$$

Заменом $x = 0$ у претходној једначини добијамо $C = \operatorname{arctg} 0 = 0$, па је тражени развој

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Пример 2.10. Изразити интеграл $\int \frac{dx}{1+x^7}$ у облику степеног реда, а затим искористити тај развој за апроксимацију интеграла $\int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^7}$ са тачношћу 10^{-7}.

$$\frac{1}{1-(-x^7)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{7n} = 1 - x^7 + x^{14} - \cdots$$

Интеграцијом претходне једнакости члан по члан добијамо

$$\int \frac{dx}{1+x^7} = C + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{7n+1}}{7n+1} = C + x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \cdots .$$

Овај ред конвергира за $|-x^7| < 1$, тј. за $|x| < 1$.

Применом Њутн-Лајбницове формуле добијамо

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{1+x^7} = \left[x - \frac{x^8}{8} + \frac{x^{15}}{15} - \cdots\right]\Bigg|_0^{1/2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(7n+1)\cdot 2^{7n+1}} + \cdots .$$

Како је овај ред алтернирајући, можемо га проценти коришћењем чињенице да парцијална сума S_n таквог реда апроксимира суму S следећим изостављеним чланом. За $n=3$ грешка је мања од члана за $n=4$:

$$\frac{1}{29\cdot 2^{29}} = 6.4\cdot 10^{-11}.$$

Дакле,

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^7} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{8\cdot 2^8} + \frac{1}{15\cdot 2^{15}} - \frac{1}{22\cdot 2^{22}} \approx 0.49951374$$

Тејлоров и Маклоренов полином

Нека је f диференцијабилна функција у некој околини тачке a. Тада је *једначина тангенте*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

заправо *линеарна апроксимација* функције f у околини тачке a.

Ако означимо

$$T_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a),$$

тада је

$$f(a) = T_1(a),\ f'(a) = T_1'(a) \text{ и } f(x) \approx T_1(x) \text{ за } x \text{ из околине тачке } a.$$

Полином $T_1(x)$ је *Тејлоров полином* првог степена за функцију f у околини тачке a.

Слично, можемо пожелити да два пута диференцијабилну функцију f у околини тачке a апроксимирамо квадратним полиномом $T_2(x)$ тако да важи

$$f(a) = T_2(a),\ f'(a) = T_2'(a) \text{ и } f''(a) = T_2''(a).$$

Тада је

$$T_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Тејлоров полином другог степена за функцију f у околини тачке a.

Дефиниција 2.2. Нека је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу који садржи тачку a у унутрашњости и n пута диференцијабилна у тачки a.

Тејлоров полином реда n за функцију f у околини тачке a је полином

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Ако је $a=0$, полином T_n називамо *Маклореновим полиномом.*

Пример 2.11. Наћи Маклоренов полином степена $n \in \mathbb{N}$ за функцију $f(x) = e^x$.

Тражени полином је облика

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Како је $f(x) = f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ и $f(0) = 1$, добијамо

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

У горњој формули смо користили да је $0! = 1$ и $f^{(0)} = f$.

Маклоренови развоји су Маклоренови полиноми произвољног степена, тј. степени редови. За функцију f која има све изводе у тачки a тај развој је облика

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Пример 2.12. Наћи Маклоренов развој функције $f(x) = e^x$ и његов радијус конвергенције.

На основу примера 2.11 Маклореновог полинома степена n, видимо да је тражени (бесконачни) развој

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Да бисмо нашли радијус конвергенције, за $a_n = \frac{x^n}{n!}$ рачунамо

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0 < 1 \quad \text{када } n \to \infty,$$

па ред конвергира за свако x - радијус конвергенције је $R = \infty$.

Пример 2.13. Наћи Маклоренов развој функције $f(x) = \sin x$.

Овде је $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x = f(x)$, па је $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$. Примећујемо да је $f^{(4k)} = f$, $f^{(4k+1)} = f'$, $f^{(4k+2)} = f''$ и $f^{(4k+3)} = f'''$ за $k \in \mathbb{N}$. Дакле,

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Слично се добијају и следећи Маклоренови развоји:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1+x)^a \approx 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n,$$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Пример 2.14. Написати интеграл $\int e^{-x^2} dx$ у облику бесконачног степеног реда, а затим израчунати $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ са тачношћу 0.001.

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \cdots .$$

Интеграцијом претходне једнакости члан по члан добијамо

$$\int e^{-x^2} dx = C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \cdots .$$

Овај ред конвергира за свако реално x, јер тада конвергира полазни ред за e^{-x^2}.

Даље је

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \cdots\right]\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \cdots ,$$

Ако посматрамо парцијалну суму

$$S_4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} = 0.7475,$$

грешка којом она апроксимира полазни интеграл је мања од (апсолутне вредности) првог изостављеног члана (члана суме за $n = 5$):

$$\frac{1}{11 \cdot 5!} = \frac{1}{1320} < 0.001.$$