Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

09.11.2015. godine

Prvi kolokvijum iz Numeričkih metoda - zadaci i rešenja
1. grupa

1. a) Dokazati da red

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{4^{k+2}}$$

konvergira, a zatim ga sumirati. (**7p**)

b) Ispitati običnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \operatorname{tg}\left(\tfrac{2015x}{4^{k+2}}\right).$$

Konvergira li ovaj red uniformno na ograničenim domenima $x \in [a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$ uz uslov $(2015a, 2015b) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$? Detaljno obrazložiti odgovor. (**8p**)

Rešenje. a) U pitanju je najobičniji geometrijski red sa količnikom $q = 3/4$ (samo dokaz konvergencije je nosio 3p), jedino što ne počinje od 1. člana:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{4^{k+2}} = \frac{1}{4^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{4^k} = \frac{1}{16} \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots \right) = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{9}{256} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{9}{64}$$

(videti prvo predavanje u semestru, samu formulu za sumu geometrijskog reda je iz nekog razloga znalo najviše dvoje studenata).

b) Kad je funkcija tg pozitivna čim joj argument upadne u interval $(0, \pi/2)$ (odnosno negativna na intervalu $(-\pi/2, 0)$), jasno je da će za svako konkretno x svi članovi datog reda biti istog znaka počev od nekog k (čim počne da važi $|\frac{2015x}{4^{k+2}}| < \frac{\pi}{2}$), tako da su obična i apsolutna konvergencija u slučaju datog reda ekvivalentne. Kako je zbog $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$, za svako konkretno x je dati red ekvikonvergentan sa redom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \left(\tfrac{2015x}{4^{k+2}}\right) = 2015x \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{4^{k+2}}$$

i onda očito konvergira na osnovu prethodnog zadatka (množenje konvergentnog reda sa $2015x$ naravno da ne utiče na njegovu konvergenciju za konkretno x). Drugi poredbeni kriterijum je radjen i na vežbama i na predavanjima, pri čemu se posle radjenog primera $\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{k}$ ovo svodi "zadatak sa nastave" - pogotovu s obzirom na izdvojen deo pod a).

Kako je funkcija tg strogo rastuća na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, važiće

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2015a}{4^{k+2}}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{2015x}{4^{k+2}}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{2015b}{4^{k+2}}\right),$$

odnosno

$$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{2015x}{4^{k+2}}\right)\right| < \operatorname{tg}\left(\frac{2015M}{4^{k+2}}\right), \quad M = max\{|a|, |b|\},$$

što znači da se dati red u domenu $x \in (a, b)$ može odozgo ograničiti redom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \operatorname{tg}\left(\frac{2015M}{4^{k+2}}\right),$$

koji ne zavisi od x, ekvikonvergentnim sa $2015M \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{4^{k+2}}$ na osnovu prethodnog razmatranja, odakle sledi da red $\sum_{k=1}^{+\infty} 3^k \operatorname{tg}\left(\frac{2015x}{4^{k+2}}\right)$ uniformno konvergira u zadatom domenu na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma (ko želi najvišu ocenu, treba da ume nekad i malo da se snadje, doduše ovakav tip "snalaženja" zahteva samo znanje osnovne teorije i pojmova; uostalom deo o uniformnoj konvergencijie je nosio ukupno 3 poena).

2. Razvijanjem u red, izračunati integral

$$\int_0^{1/2} x^2 \ln(1 + x^5)\, dx$$

sa tačnošću 10^{-8}. Detaljno obrazložiti postupak. (**10p**)

Rešenje. Koristeći razvoj funkcije $f(t) = \ln(1 + t)$ u beskonačni konvergentni stepeni red na intervalu $(-1, 1)$, stavljajući $t = x^5$, dobijamo

$$x^2 \ln(1 + x^5) = x^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{5k}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{5k+2}}{k}.$$

Kako je interval integracije sadržan u intervalu konvergenicije datog stepenog reda, možemo ga integraliti član po član (**ovo je bilo obavezno naglasiti tokom rešavanja zadatka**), pa je

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} x^2 \ln(1 + x^5)\, dx &= \int_0^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{5k+2}}{k}\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{1/2} \frac{x^{5k+2}}{k}\, dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{5k+3}}{k(5k+3)}\Big|_0^{1/2} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k(5k+3) \cdot 2^{5k+3}}.\end{aligned}$$

Jasno je da poslednja dobijena suma predstavlja alternativni red čiji članovi po apsolutnoj vrednosti monotono teže nuli i poznato je da je ostatak takvog reda (u ovom slučaju greška računanja integrala) manji od apsolutne vrednosti svog prvog sabirka. Najmanji prirodan broj k takav da je

$$\frac{1}{k(5k+3)\cdot 2^{5k+3}} < 10^{-8}$$

jeste $k = 4$ (faktički je dovoljno izračunati samo prva tri sabirka cele sume), pa za traženu aproksimaciju možemo uzeti

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{(-1)^{k-1}}{k(5k+3)\cdot 2^{5k+3}} = 4.8366e - 004$$

Uporediti ovaj zadatak sa primerom $\int_0^1 \sin t^2 \, dt$ ostavljenim u sastavu pripremnog materijala.

3. Kako glasi Košijev integralni kriterijum? Dati skicu dokaza. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2n^5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(7n-6)^2}} \right). \quad \textbf{(10p)}$$

Rešenje. U globalu su studenti verbalno jako šture odgovore davali i po pitanju same formulacije, a pogotovu po pitanju skice dokaza (ko je uopšte stigao do toga). Kriterijum se mogao direktno primeniti na rešavanje integrala

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2x^5}} + \frac{1}{\sqrt[3]{(7x-6)^2}} \right) dx,$$

a moglo se konstatovati i da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(7n-6)^2}}$ ekvikonvergentni sa redovima $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$, ali u tom drugom slučaju je trebalo izvesti tvrdjenje o konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ direktnom primerom citiranog kriterijuma. Kako prvi red konvergira, a drugi divergira, njihov zbir divergira.

2. grupa

1. a) Dokazati da red

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k+2}}{4^k}$$

konvergira, a zatim ga sumirati.

b) Ispitati običnu i apsolutnu konvergenciju funkcionalnog reda

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{k+2} \operatorname{tg}\left(\tfrac{2015x}{4^k}\right).$$

Konvergira li ovaj red uniformno na ograničenim domenima ($x \in [a,b], \ \ a, b \in \mathbb{R}$)? Detaljno obrazložiti odgovor.

Rešenje. a) U pitanju je najobičniji geometrijski red sa količnikom $q = 3/4$ (samo dokaz konvergencije je nosio 3p), jedino što ne počinje od 1. člana:

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k+2}}{4^k} = 3^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^k}{4^k} = 9\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots\right) = 9\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{81}{16}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{81}{4}$$

(videti prvo predavanje u semestru, samu formulu za sumu geometrijskog reda je iz nekog razloga znalo najviše dvoje studenata).

b) Kad je funkcija tg pozitivna čim joj argument upadne u interval $(0, \pi/2)$ (odnosno negativna na intervalu $(-\pi/2, 0)$), jasno je da će za svako konkretno x svi članovi datog reda biti istog znaka počev od nekog k (čim počne da važi $|\frac{2015x}{4^k}| < \frac{\pi}{2}$), tako da su obična i apsolutna konvergencija u slučaju datog reda ekvivalentne. Kako je zbog $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$, za svako konkretno x je dati red ekvikonvergentan sa redom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{k+2}\left(\tfrac{2015x}{4^k}\right) = 2015x \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k+2}}{4^k}$$

i onda očito konvergira na osnovu prethodnog zadatka (množenje konvergentnog reda sa $2015x$ naravno da ne utiče na njegovu konvergenciju za konkretno x). Drugi poredbeni kriterijum je radjen i na vežbama i na predavanjima, pri čemu se posle radjenog primera $\sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{k}$ ovo svodi "zadatak sa nastave" - pogotovu s obzirom na izdvojen deo pod a).

Kako je funkcija tg strogo rastuća na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, važiće

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2015a}{4^k}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{2015x}{4^k}\right) < \operatorname{tg}\left(\frac{2015b}{4^k}\right),$$

odnosno

$$\left|\operatorname{tg}\left(\frac{2015x}{4^k}\right)\right| < \operatorname{tg}\left(\frac{2015M}{4^k}\right), \quad M = max\{|a|, |b|\},$$

što znači da se dati red u domenu $x \in (a, b)$ može odozgo ograničiti redom

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{k+2} \operatorname{tg}\left(\frac{2015M}{4^k}\right),$$

koji ne zavisi od x, ekvikonvergentnim sa $2015M \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{3^{k+2}}{4^k}$ na osnovu prethodnog razmatranja, odakle sledi da red $\sum_{k=1}^{+\infty} 3^{k+2} \operatorname{tg}\left(\frac{2015x}{4^k}\right)$ uniformno konvergira u zadatom domenu na osnovu Vajerštrasovog kriterijuma (ko želi najvišu ocenu, treba da ume nekad i malo da se snadje, doduše ovakav tip "snalaženja" zahteva samo znanje osnovne teorije i pojmova; uostalom deo o uniformnoj konvergencijie je nosio ukupno 3 poena).

2. Razvijanjem u red, izračunati integral

$$\int_0^{1/3} x^4 \ln\left(1 + x^3\right) dx$$

sa tačnošću 10^{-8}. Detaljno obrazložiti postupak. (**10p**)

Rešenje. Koristeći razvoj funkcije $f(t) = \ln(1+t)$ u beskonačni konvergentni stepeni red na intervalu $(-1,1)$, stavljajući $t = x^3$, dobijamo

$$x^4 \ln(1+x^3) = x^4 \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{3k}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{3k+4}}{k}.$$

Kako je interval integracije sadržan u intervalu konvergenicije datog stepenog reda, možemo ga integraliti član po član (**ovo je bilo obavezno naglasiti tokom rešavanja zadatka**), pa je

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3} x^4 \ln(1+x^3)\,dx &= \int_0^{1/3} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{3k+4}}{k} \right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \int_0^{1/3} \frac{x^{3k+4}}{k}\,dx \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{3k+5}}{k(3k+5)}\Big|_0^{1/3} = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k(3k+5)\cdot 3^{3k+5}}.\end{aligned}$$

Jasno je da poslednja dobijena suma predstavlja alternativni red čiji članovi po apsolutnoj vrednosti monotono teže nuli i poznato je da je ostatak takvog reda (u ovom slučaju greška računanja integrala) manji od apsolutne vrednosti svog prvog sabirka. Najmanji prirodan broj k takav da je

$$\frac{1}{k(3k+5)\cdot 3^{3k+5}} < 10^{-8}$$

jeste $k = 3$ (faktički je dovoljno izračunati samo prva dva sabirka cele sume), pa za traženu aproksimaciju možemo uzeti

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{(-1)^{k-1}}{k(3k+5)\cdot 3^{3k+5}} = 1.9023e - 005$$

Uporediti ovaj zadatak sa primerom $\int_0^1 \sin t^2\,dt$ ostavljenim u sastavu pripremnog materijala.

3. Kako glasi Košijev integralni kriterijum? Dati skicu dokaza. Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3n^3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{(6n-7)^2}} \right).$$

Rešenje. U globalu su studenti verbalno jako šture odgovore davali i po pitanju same formulacije, a pogotovu po pitanju skice dokaza (ko je uopšte stigao do toga). Kriterijum se mogao direktno primeniti na rešavanje integrala

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{3x^3}} + \frac{1}{\sqrt[5]{(6x-7)^2}} \right) dx,$$

a moglo se konstatovati i da su redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3x^3}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{(6n-7)^2}}$ ekvikonvergentni sa redovima $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/5}}$, ali u tom drugom slučaju je trebalo izvesti tvrdjenje o konvergenciji reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ direktnom primerom citiranog kriterijuma. Kako prvi red konvergira, a drugi divergira, njihov zbir divergira.

Aleksandar Pejčev