Рада Мутавџић Ђукић

5 Појам функције. Лимеси - теорија

5.1 Појам функције; преглед елементарних функција

Дефиниција 5.1. Нека су X и Y два непразна скупа. Правило које сваком елементу скупа X придружује тачно један елемент скупа Y се назива функција или пресликавање скупа X (домен функције) у скуп Y (кодомен функције).

Нека је дата функција $f : X \mapsto Y$. Скуп свих тачака $\{(x, f(x))|x \in X\}$ назива се график функције f.

- Функција $f : X \mapsto Y$ је „$1-1$" ако за све $x_1, x_2 \in X$ такве да је $x_1 \neq x_2$ важи $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Функција $f : X \mapsto Y$ је „на" ако за свако $y \in Y$ постоји $x \in X$ такво да је $f(x) = y$.
- Функција $f : X \mapsto Y$ је бијекција ако је „$1-1$" и „на". Тада постоји инверзна функција f^{-1} функције f. Важи $f^{-1}(f(x)) = x$ за свако $x \in X$ и $f(f^{-1}(y)) = y$ за свако $y \in Y$.

Ако су скупови X и Y подскупови скупа $\mathbb{R}$ реалних бројева, тада је f реална функција реалне променљиве.

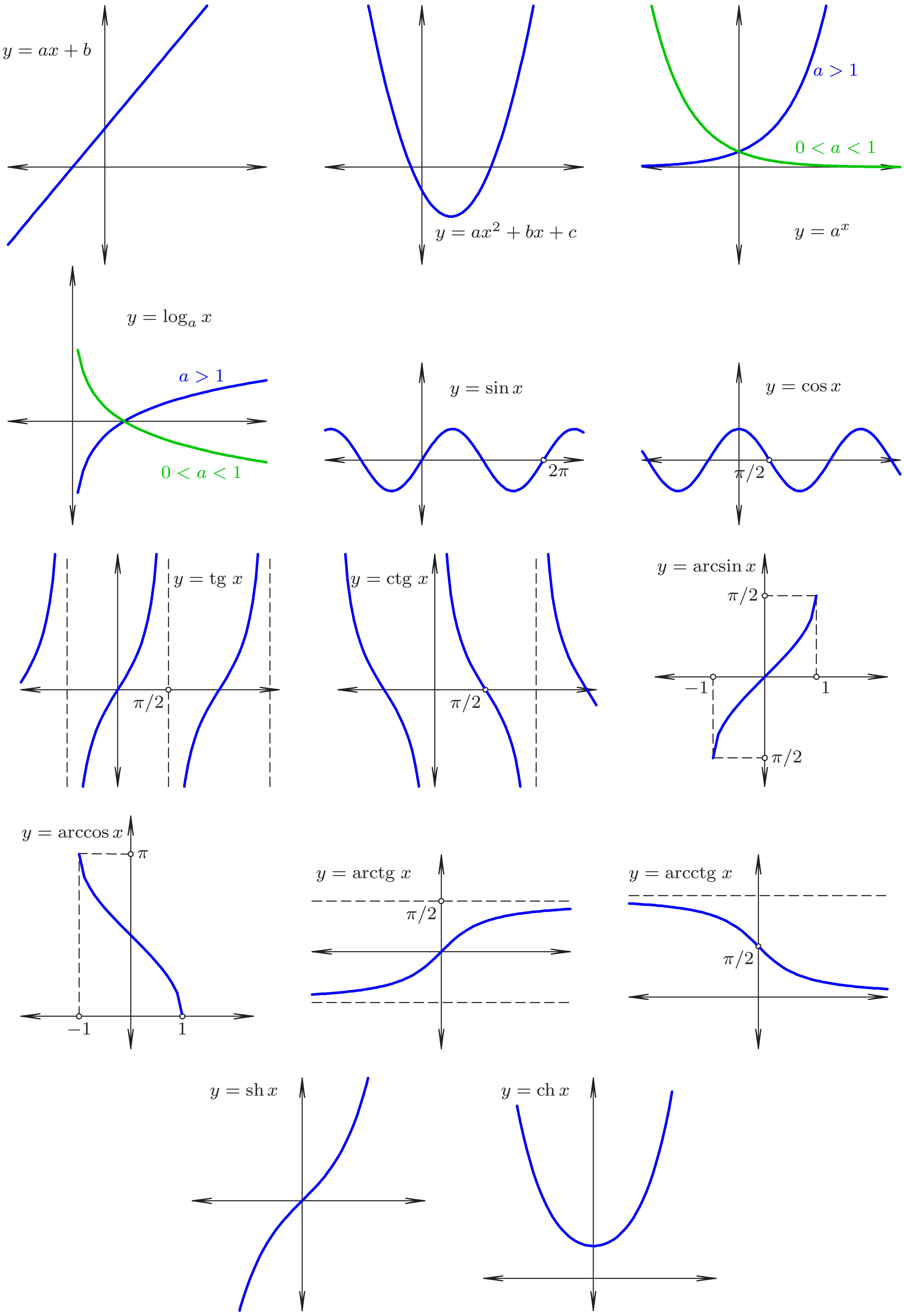
Нека је f реална функција реалне променљиве и $x_1, x_2 \in S \subset X$. Функција f је на скупу S

- *строго растућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) < f(x_2)$;
- *растућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) \leqslant f(x_2)$;
- *строго опадајућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) > (x_2)$;
- *опадајућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Функција f је *монотона* ако задовољава један од претходна четири случаја.

Следе графици основних елементарних функција:

- линеарне функције $y = ax + b$,
- квадаратне функције $y = ax^2 + bx + c$,
- екпоненцијалне функције $y = a^x$ за $0 < a < 1$ и $a > 1$,
- логаритамске функције $y = \log_a x$ за $0 < a < 1$ и $a > 1$ $(x > 0)$,
- тригонометријских функција $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$,
- инверзних тригонометријских функција $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$,
- хиперболичких функција $y = \operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ (*синус хиперболички*) и $y = \operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$ (*косинус хиперболички*). Важи $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Одговарајуће инверзне функције су
- *ареа-синус хиперболички* $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $(x \in \mathbb{R})$ и
- *ареа-косинус хиперболички* $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $(x > 1)$.


$y = ax + b$
$y = ax^2 + bx + c$
$a > 1$
$0 < a < 1$
$y = a^x$
$y = \log_a x$
$a > 1$
$0 < a < 1$
$y = \sin x$
2π
$y = \cos x$
$\pi/2$
$y = \mathrm{tg}\ x$
$\pi/2$
$y = \mathrm{ctg}\ x$
$\pi/2$
$y = \arcsin x$
$\pi/2$
-1
1
$\pi/2$
$y = \arccos x$
π
-1
1
$y = \mathrm{arctg}\ x$
$\pi/2$
$y = \mathrm{arcctg}\ x$
$\pi/2$
$y = \mathrm{sh}\, x$
$y = \mathrm{ch}\, x$

5.2 Дефиниција и особине лимеса

Низ реалних бројева је функција $a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Примери низова су:

1° аритметички низ ($a_{n+1} - a_n = d$ за свако $n \in \mathbb{N}$);

2° геометријски низ $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \text{ за свако } n \in \mathbb{N}\right)$;

3° хармонијски низ $a_n = \frac{1}{n}$.

Дефиниција 5.2. (Лимес низа) Кажемо да је
$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$
ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број N такав да, кад год је $n > N$ важи $|a_n - L| < \varepsilon$.

Другим речима, за свако довољно велико n вредност a_n је произвољно близу L.

Пример 5.1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (колико год малу околину нуле да изаберемо, постоји број N тако да је за све $n > N$ вредност $\frac{1}{n}$ у тој околини нуле). Формално, за произвољно $\varepsilon > 0$ треба да нађемо број N тако да за све $n > N$ важи $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$. Дакле, треба да буде $n > \frac{1}{\varepsilon}$ за све $n > N$, па је довољно да изаберено неко N за које важи $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (нпр. $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$).

Под околином тачке a подразумевамо неки отворен интервал који садржи тачку a (околина тачке $+\infty$ је $(M, +\infty)$).

Дефиниција 5.3. (Лимес функције) Претпоставимо да је $f(x)$ функција дефинисана у некој оклини тачке a, осим можда у самој тачки a. Кажемо да је
$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$
ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да, кад год је $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$ важи $|a_n - L| < \varepsilon$.

Другим речима, за свако x довољно близу тачки a, вредност $f(x)$ је произвољно близу L. Ако је $a = \pm\infty$, израз „довољно близу" мењамо изразом „довољно далеко десно (односно лево)" и одговарајућу дефиницију треба томе прилагодити.

Ако лимес низа или функције постоји, кажемо да он(а) *конвергира*, а у супротном да *дивергира*.

Пример 5.2. Посматрајмо функцију сигнум:
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{за } x < 0, \\ 0, & \text{за } x = 0, \\ 1, & \text{за } x > 0. \end{cases}$$
Ако пробамо да нађемо лимес функције у нули, видимо да је функција константно једнака -1 када x тежи нули слева, односно 1 ако x тежи нули здесна. Са друге стране је $f(0) = 0$. Како $f(x)$ не тежи једном броју, то лимес кад x тежи нули не постоји.

Дефиниција 5.4. (Леви и десни лимес) Кажемо да је леви (односно десни) лимес функције $f(x)$ када x тежи a једнак броју L, са ознаком
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L, \quad \text{односно} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L,$$
ако је за свако x довољно близу a и мање (односно веће) од a вредност $f(x)$ произвољно блиска L.

Видимо да је $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ако и само ако постоје и леви и десни лимес и важи
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

Пример 5.3. Наводимо неке лимесе у крајевима области дефинисаности елементарних функција (погледати одговарајуће графике):

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty;$$
$$\lim_{x\to -\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty;$$
$$\lim_{x\to \pm\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \pm\infty, \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Теорема 5.1. (Особине лимеса) Претпоставимо да постоје лимеси $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Нека је c константа. Тада важи:

(1) $\lim\limits_{x\to a} c = c$;

(2) $\lim\limits_{x\to a} x = a$;

(3) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

(5) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

(6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ ако је $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Теорема 5.2. Претпоставимо да постоје лимеси $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$. Ако у околини тачке $x = a$ важи $f(x) \geqslant h(x) \geqslant g(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$, онда је и $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

Пример 5.4. Одредити $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

Како је

$$-\frac{1}{|x|} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{|x|} \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{|x|} = 0,$$

следи $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Нека је $g(x)$ строго позитивно у некој околини тачке a.

Ако је $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, кажемо да је $f(x)$ *занемарљиво мало* у поређењу са $g(x)$ и за то користимо ознаку *мало „о”*:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{када} \quad x \to a.$$

Такође, ако је $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ограничено у околини тачке a, тј. постоји константа $M > 0$ таква да у тој околини важи $|f(x)| \leqslant M \cdot |g(x)|$, користимо ознаку *велико „O”*:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{када} \quad x \to a.$$

Ако је $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, користити се ознака

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{када} \quad x \to a$$

и каже се да је $f(x)$ *асимптотски једнако* $g(x)$ када $x \to a$.

5.3 Непрекидност

Дефиниција 5.5. Функција f је *непрекидна* у тачки a ако је $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Функција f је *непрекидна здесна* (*слева*) у тачки a ако је $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (односно $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$).

Функција f је *непрекидна на интервалу* ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала (у крајевима интервала подразумевамо само непрекидност здесна/слева).

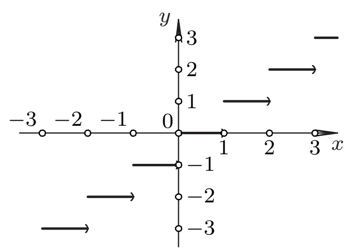
Неформално, непрекидност функције можемо да интерпретирамо као непрекидност њеног графика. Једно важно својство непрекидних функција је Болцано-Кошијева теорема о међувредности.

Теорема 5.3. (Теорема о међувредности) Нека је f непрекидна функција на интервалу $[a, b]$. Ако је $f(a) = A$, $f(b) = B$ и C произвољна вредност између A и B, онда постоји $c \in [a, b]$ за које је $f(c) = C$

Доказ. Посматрајмо најмање c такво да је $f(x) \geqslant C$ за све $x \in (c, b]$. Свакако је $a < c < b$ и $f(c) \geqslant C$.

Ако је $f(c) > C$, онда постоји ε тако да је $f(c) - \varepsilon \geqslant C$, а из непрекидности функције f следи да постоји δ такво да, кад год је $|x - c| < \delta$, важи $|f(x) - f(c)| \leqslant \varepsilon$. Дакле, за $x > c - \delta$ такође важи $f(x) \geqslant C$, што је у супротности са минималношћу броја c. Према томе, мора бити $f(c) = C$. □

Пример 5.5. Посматрајмо функцију *цео део*: $[x]$ означава највећи цео број који није већи од x. На пример, $[1{,}5] = 1$ $[\pi] = 3$. Видимо да ова функција има прекиде у целим бројевима, док је у осталим тачкама непрекидна.



Заиста, ако a није цео број, функција $[x]$ је константна (дакле, непрекидна) у околини тачке $x = a$. С друге стране, ако је a цео број, онда је

$$\lim_{x \to a^-} [x] = a - 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to a^+} [x] = a,$$

па $\lim\limits_{x \to a} [x]$ не постоји и самим тим није једнак $[a]$.

Теорема 5.4. Ако су f и g непрекидне функције на неком интервалу, онда су и функције $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$ непрекидне у свом домену.

Теорема 5.5. Ако је функција f непрекидна у тачки b и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, онда $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. Ако су функције f и g непрекидне, онда је и $f(g(x))$ непрекидна.

Теорема 5.6. Ако је функција f непрекидна и $1 - 1$ на интервалу (a, b), онда је и њена инверзна функција f^{-1} непрекидна.

Теорема 5.7. Све елементарне функције су непрекидне у својим доменима.

Пример 5.6. Одредити $\lim\limits_{x \to 1} \operatorname{arctg} \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{2x^3 - 2}}$.

Како је

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+1}{2(x^2+x+1)} = \frac{1+1}{2(1^2+1+1)} = \frac{1}{3},$$

из непрекидности функције $\operatorname{arctg} \sqrt{y}$ следи

$$\lim_{x \to 1} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2}} = \operatorname{arctg} \lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

5.4 Неки основни лимеси; задаци

Лимес рационалне функције кад $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0}{q_m x^m + \cdots + q_1 x + q_0} = \begin{cases} +\infty, & \text{за } n > m \\ \frac{p_n}{q_m}, & \text{за } n = m \\ 0, & \text{за } n < m. \end{cases}$$

Пример 5.7. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x(x^2-1)^2}{x^5 - x^3 + 4}$.

Како $\frac{1}{x} \to 0$ када $x \to \infty$, дељењем бројиоца и имениоца са x^5 добијамо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x(x^2-1)^2}{x^5 - x^3 + 4} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(1-\frac{1}{x^2})^2}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^5}} = \frac{2(1-0)^2}{1-0} = 2.$$

„Таблични” лимеси

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Приметимо да се већина ових лимеса једноставно може доказати применом Лопиталовог правила.

Пример 5.8. Израчунати $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

Задатак ћемо решити свођењем на познати лимес $\lim\limits_{t\to0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$:

$$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin^2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to0} \frac{2\sin^4 \frac{x}{2}}{2^4 \left(\frac{x}{2}\right)^4} = \frac{1}{8}.$$

Пример 5.9. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{3x}$.

Користимо познати лимес $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{t}\right)^t = e$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x-2}\right)^{(x-2)\frac{3x}{x-2}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x-2}} = e^3.$$

Пример 5.10. Наћи асимптоте функције $y = \frac{2^x+1}{2^x-1}$.

Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Видимо да је

$$\lim_{x\to0\pm} \frac{2^x+1}{2^x-1} = \pm\infty,$$

па је права $x = 0$ вертикална асимптота. Даље је

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+1}{2^x-1} = -1,$$

тј. права $y = -1$ је хоризонтална асимптота кад $x \to -\infty$. Слично је

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}} = 1,$$

па је права $y = 1$ хоризонтална асимптота кад $x \to \infty$.