Рада Мутавџић Ђукић

6 Интерполација функција - део 1

6.1 Општи задатак интерполације

Претпоставимо да су познате вредности $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ неке функције $y = f(x)$, где је $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, а није познат аналитички облик функције f или је јако компликован. Потребно је израчунати $f(x)$ за $x \neq x_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Ако је потребно наћи вредност $f(x)$ за неко

- $x_0 < x < x_n$ $(x \neq x_i)$, онда се тај задатак зове *интерполација*, а ако је
- $x < x_0$ или $x > x_n$, онда се задатак зове *екстраполација*.

Како се оба задатка решавају на исти начин, за случаја ћемо користити термин интерполација.

Задатак интерполације је на основу таблице познатих вредности

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

наћи једноставију функцију F која се поклапа са датим вредностима функције f у тачкама x_i, тј. $F(x_i) = f(x_i)$, а помоћу које ћемо приближно налазити вредности $f(x) \approx F(x)$ за $x \neq x_i$. Овај задатак може имати јединствено решење, коначно или бесконачно много решења, или немати решење.

Природно је захтевати и да *интерполациона функција* F

- добро апроскимира функцију f у осталим тачкама $x \in [a, b]$, $x \neq x_i$, тј. да важи $|F(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$,
- буде што једноставнија за рачунање.

Нека су фунције $g_0, g_1, \dots, g_n$ линеарно независне задате функције (ми ћемо бирати степене функције $g_k = x^k$, а други уобичајен избор су тригонометријске функције $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots$).

Интерполациону функцију F тражимо у облику уопштеног интерполационог полинома

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x),$$

где су $a_0, a_1, \dots, a_n$ неодређени коефицијенти. Из услова интерполације $F(x_i) = f(x_i)$ добијамо систем $n+1$ једначина за одређивање коефицијената a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Ако је детерминанта система

$$D(g) = \begin{vmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \cdots & g_n(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \cdots & g_n(x_1) \\ \vdots & & & \\ g_0(x_n) & g_1(x_n) & \cdots & g_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

онда су коефицијенти $a_0, a_1, \dots, a_n$ једнозначно одређени, па је једнозначно одређена интерполациона функција F.

Бирањем $g_i = x^i$ интерполациона функција добија облик $F(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, где се коефицијенти добијају из система једначина

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n &= y_1, \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n &= y_n, \end{aligned}$$

чија је детерминанта (Вандермондова)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant m < k \leqslant n} (x_k - x_m) \neq 0,$$

јер су чворови међусобно различити. Дакле, интерполациони полином постоји и јединствен је, али постоји много форми записивања тог полинома.

Посматрајмо сада проблем оцене грешке апроксимације $f(x) \approx P_n(x)$.

Теорема 6.1. (Вајерштрасова теорема) Нека је f непрекидна функција дефинисана на интервалу $[a, b]$. Тада за свако $\varepsilon > 0$ постоји полином P_n такав да за свако $x \in [a, b]$ важи $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

Приликом интерполације функција важна су следећа питања.

1. Формирање интерполационог полинома за дати избор функција $g_0, g_1, \ldots, g_n$.
2. Налажење оцене грешке апроксимације.
3. Оптималан избор чворова да би се минимизовла грешка.
4. Анализа утицаја грешака приближних вредности функције у чворовима.
5. Испитивање конвергенције низа интерполационих полинома ка функцији $f(x)$.

6.2 Лагранжов интерполациони полином

Нека су дати чворови $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ и вредности функције $y_i = f(x_i)$ у тим чворовима. Треба конструисати интерполациони полином $L_n(x)$ такав да је $L_n(x_i) = y_i$. Формирајмо помоћни полином

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

где је δ_{ij} Кронекеров симбол. Дакле, полином p_i се анулира у тачкама $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$, па је за неку константу C_i

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n).$$

За $x = x_i$ добијамо

$$1 = p_i(x_i) = C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n),$$

одакле је

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}.$$

Следи да је

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

па тражени интерполациони полином има облик

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) y_i, \quad \text{тј.} \quad L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)} y_i$$

и представља *Лагранжов интерполациони полином* и степена је највише n. Можемо га записати и у краћем облику. Ако уведемо ознаку $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$, тада је

$$L_n(x) = \omega(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{(x - x_i)\omega'(x_i)}.$$

Да бисмо доказали јединственост Лагранжовог полинома, претпоставимо супротно, тј. да је $\tilde{L}_n$ полином различит од полинома L_n степена највише n који такође интерполира функцију f у чворовима x_i ($\tilde{L}_n(x_i) = y_i$). Тада полином $Q_n(x) = L_n(x) - \tilde{L}_n(x)$ има степен највише n и $n + 1$ нулу $x_0, x_1, \ldots, x_n$, па мора бити $Q_n = 0$, тј. $L_n \equiv \tilde{L}_n$.

Пример 6.1. Функција $f(x)$ је задата табелом

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	4	13	73

Наћи Лагранжов интерполациони полином $L_3(x)$ и помоћу њега израчунати приближну вредност $f(3)$.

$$\begin{aligned} L_3(x) = &\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}\cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)(x-4)}{(1-0)(1-2)(1-4)}\cdot 4 + \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(2-0)(2-1)(2-4)}\cdot 13 \\ &+ \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(4-0)(4-1)(4-2)}\cdot 73 = x^3 + 2x + 1, \end{aligned}$$

$f(3) \approx L_3(3) = 34$.

6.3 Оцена грешке интерполације

У тачкама различитим од x_i (ако f није полином степена не већег од n) постојаће грешка интерполације (грешка методе),

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x).$$

Како су вредности y_i приближне, јавља се допунска грешка (неотклоњива), а приликом рачунања јавља се и грешка заокруживања. Размотримо оцену грешке методе (оцену остатка интерполације).

Пођимо од помоћне функције

$$F(z) = f(z) - L_n(z) - \frac{\omega(z)}{\omega(x)}\cdot R_n(x),$$

где је z реална променљива, а $x \in [x_0, x_n]$, $x \neq x_i$ фиксирана вредност. Ако претпоставимо да је $f \in C^{n+1}[x_0, x_n]$, тада је $F \in C^{n+1}[x_0, x_n]$. Поред тога, F се анулира у $n+2$ тачке $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$ које одређују $n+1$ подсегмент сегмента $[x_0, x_n]$. Ако на сваком од њих применимо Ролову теорему, закључујемо да функција $F'(z)$ има најмање $n+1$ нулу на $[x_0, x_n]$. Даље, применом Ролове теореме на редом функције $F'(z), F''(z), \ldots, F^{(n+1)}(z)$ закључујемо да $F^{(n+1)}(z)$ има бар једну нулу $\eta \in [x_0, x_n]$, $F^{(n+1)}(\eta) = 0$. Ако приметимо још да је

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}[(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_n)] = (n+1)!,$$

добијамо

$$F^{n+1}(z) = f^{n+1}(z) = \frac{(n+1)!}{\omega(x)}R_n(x),$$

одакле за $z = \eta$ следи

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!}\omega(x).$$

Коначно, ако је

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n} |f^{n+1}(x)| \leqslant M_{n+1} \quad \text{(што је у пракси немогуће или тешко проверити)},$$

важи

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega(x)|.$$