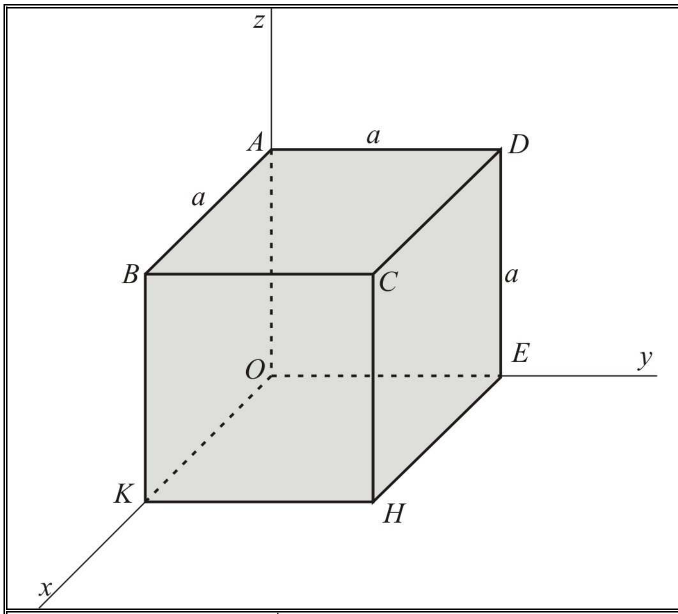
МЕХАНИКА М
Наташа Тришовић

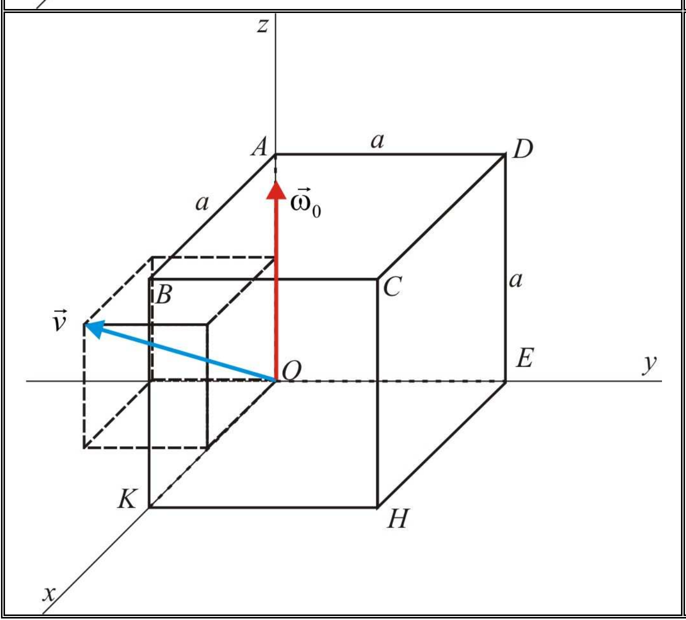
Сложено кретање крутог тела

задаци



Задатак 1. Коцка, ивице a, обрће се око осе Oz у позитивном математичком смеру, угаоном брзином интензитета ω_0, и истовремено креће се транслаторно брзином $\vec{v} = a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j} + a\omega_0\vec{k}$.

Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака O и C.

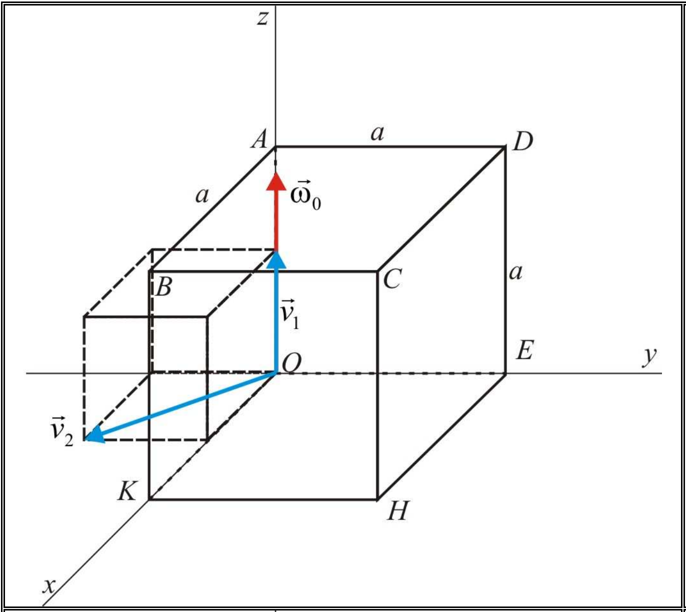


Решење:

1) Који је случај сложеног кретања тела?

Брзина транслаторног кретања заклапа произвољни угао са вектором угаоне брзине

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 118-119)



2) Вектор брзине $\vec{v}$ разложити на две ортогоналне компоненте:

Компоненту $\vec{v}_1$, колинеарну оси Oz, и компоненту $\vec{v}_2$ у равни xOy управну на осу Oz.

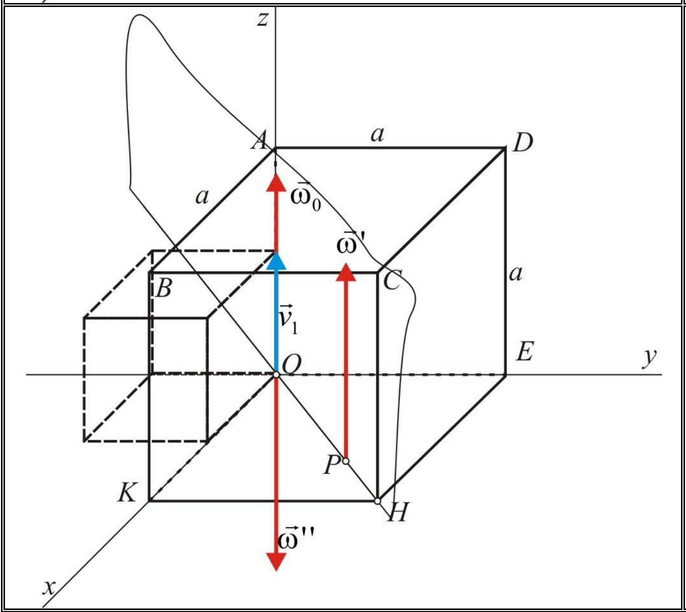
$$\vec{v} = \underbrace{a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j}}_{\vec{v}_2} \underbrace{+a\omega_0\vec{k}}_{\vec{v}_1}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1 = a\omega_0\vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j}$$

Дакле: $(\vec{v}, \vec{\omega}_0) \sim (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_0)$



3) Компоненту $\vec{v}_2$, заменити одговарајућим кинематичким спрегом $[\vec{\omega}'; \vec{\omega}'']$, у равни управној на линију носача вектора $\vec{v}_2$.

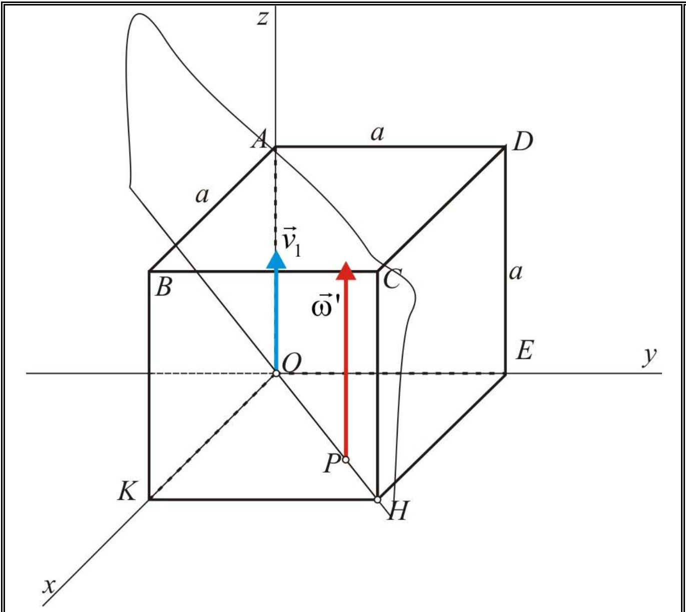
Вектори $\vec{\omega}', \vec{\omega}''$ се бирају тако да важи

$\vec{\omega}_0 = -\vec{\omega}'', \quad \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}'$

($\vec{\omega}''$ се налази на оси Oz, и супротног је смера од вектора $\vec{\omega}_0$)

Сада је:

$$(\vec{v}, \vec{\omega}_0) \sim (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{\omega}_0) \sim (\vec{v}_1, \vec{\omega}', \vec{\omega}'', \vec{\omega}_0)$$



$$\left(\vec{v},\vec{\omega}_0\right) \sim \left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{\omega}_0\right) \sim \left(\vec{v}_1,\vec{\omega}',\vec{\omega}'',\vec{\omega}_0\right) \sim \left(\vec{v}_1,\vec{\omega}'\right)$$

Јер је систем вектора $\left(\vec{\omega}'',\vec{\omega}_0\right) \sim 0$

4) Положај тачке P на месту продора линије носача вектора $\vec{\omega}'$ кроз координатну раван xOy одређује се сагласно једначини

$$\vec{v}_2 = \vec{\omega}' \times \overrightarrow{PO} = \vec{\omega}' \times \left(-\overrightarrow{OP}\right) = \overrightarrow{OP} \times \vec{\omega}'$$

$$a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_P & y_P & 0 \\ 0 & 0 & \omega_0 \end{vmatrix}$$

$$a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j} = y_P\omega_0\vec{i} - x_P\omega_0\vec{j}$$

$$a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j} = y_P\omega_0\vec{i} - x_P\omega_0\vec{j}$$

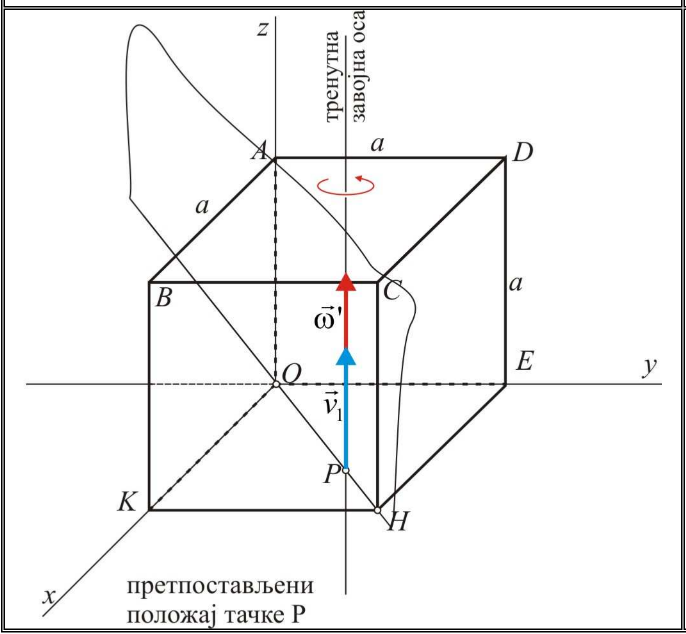
$$x_P = a,\quad y_P = a,\qquad P\left(a,a,0\right)$$

или (други начин)

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{\omega}' \times \vec{v}_2}{\omega'^2}$$ (релација 4.38, стр 119)

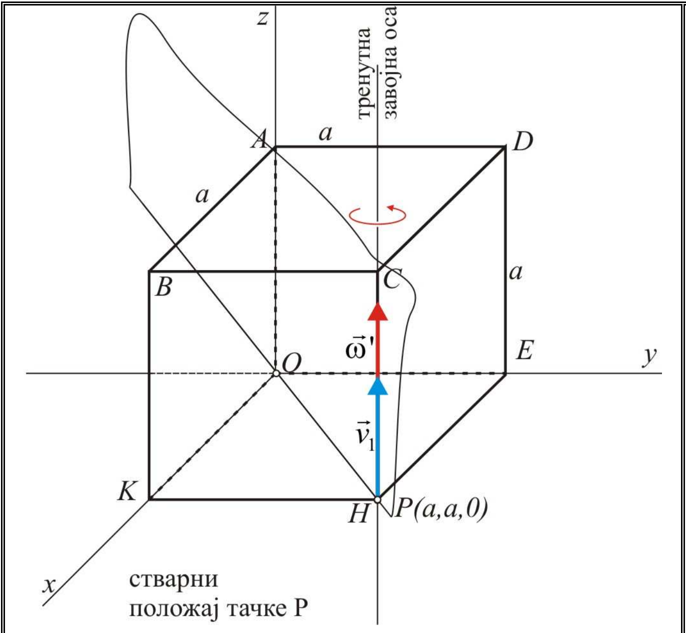
$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{\omega_0^2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a\omega_0 & -a\omega_0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{a\omega_0^2\vec{i} + a\omega_0^2\vec{j}}{\omega_0^2}$$

$$\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + a\vec{j} + 0\vec{k}$$



5) Вектор $\vec{v}_1$ је слободан вектор, па се може паралелно пренети у тачку P.

Тако се добија систем колинеарних вектора $\left(\vec{v}_1,\vec{\omega}'\right)$. На тај начин ово сложено кретање је сведено на **тренутно завојно кретање (кинематички завртањ).**



6) *Корак кинематичког завртња*:

$$h = v_1 T = v_1 \frac{2\pi}{\omega_0} = a\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$h = 2a\pi$$

Параметар кинематичког завртња:

$$p = \frac{v_1}{\omega'} = \frac{a\omega_0}{\omega_0} = a$$

или (други начин)

$$p = \frac{\vec{v}\cdot\vec{\omega}_0}{\omega_0^2} = \frac{a\omega_0\cdot 0 + \left(-a\omega_0\right)\cdot 0 + a\omega_0\cdot\omega_0}{\omega_0^2} = a$$

(израз 4.49 стр 122 Младеновић)

Једначина тренутне завојне осе:

$$\frac{a\omega_0 - \omega_0 y}{0} = \frac{-a\omega_0 + \omega_0 x}{0} = \frac{a\omega_0}{\omega_0} = p = a$$

(релација 4.48, стр 122)

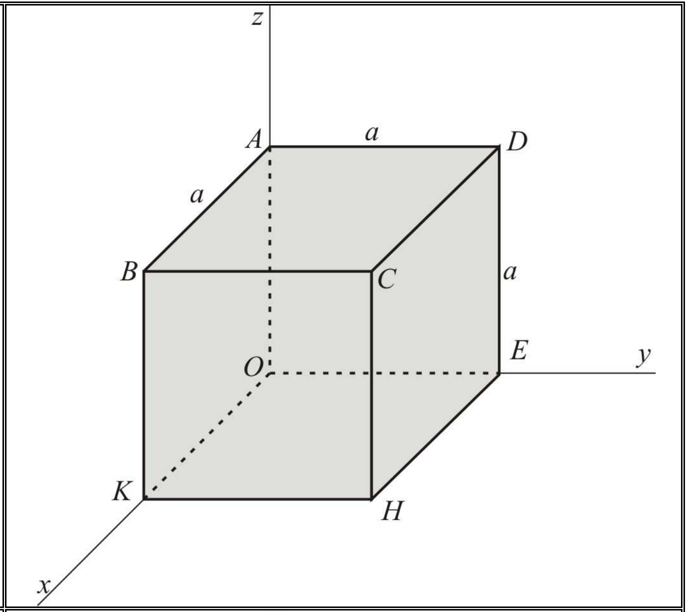
7) Брзине тачака O и C:

$$\vec{v}_O = \underbrace{\vec{\omega}'\times\overrightarrow{PO}}_{\substack{usled\ rotacije\ tela \\ oko\ trenutne\ ose}} + \underbrace{\vec{v}_1}_{\substack{usled\ translacije \\ tela}} = \overrightarrow{OP}\times\vec{\omega}' + \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a & a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0\vec{i} + a\omega_0\vec{j} + \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1 = \vec{v}$$

$\vec{v}_O = \vec{v} = a\omega_0\vec{i} - a\omega_0\vec{j} + a\omega_0\vec{k}$ - што се могло закључити и из поставке задатка, јер се тачка O налази на правој која садржи вектор $\vec{\omega}_0$.

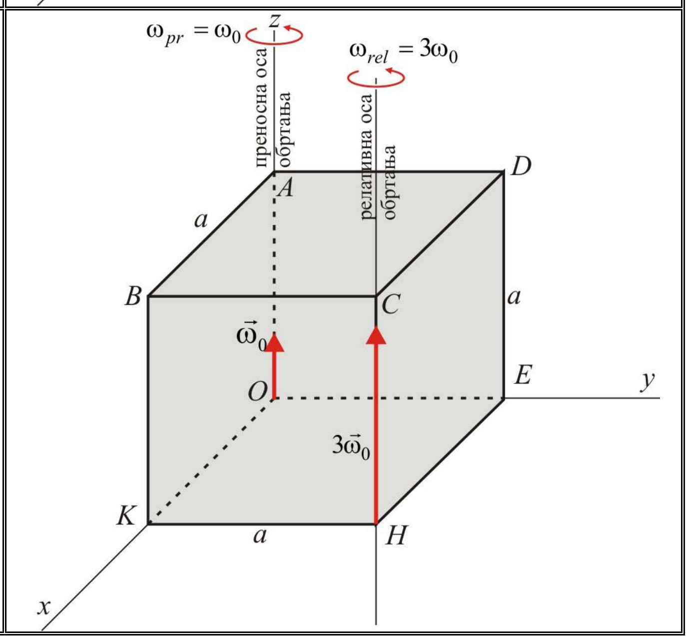
$$\vec{v}_C = \underbrace{\vec{\omega}'\times\overrightarrow{PC}}_{\substack{usled\ rotacije\ tela \\ oko\ trenutne\ ose}} + \underbrace{\vec{v}_1}_{\substack{usled\ translacije \\ tela}} = \overrightarrow{CP}\times\vec{\omega}' + \vec{v}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ a-a & a-a & 0-a \end{vmatrix} = 0 + \vec{v}_1 = \vec{v}_1$$

$\vec{v}_C = \vec{v}_1 = a\omega_0\vec{k}$ - што се могло закључити и без рачуна јер се тачка C налази на тренутној оси ротације и њена брзина се своди само на брзину услед транслације тела.

<table>
<tr>
<td><u>Задатак 2.</u> Коцка, ивице a, обрће се око Oz осе у позитивном математичком смеру, угаоном брзином интензитета ω_0, и истовремено обрће се око ивице CH у истом смеру, угаоном брзином интензитета $3\omega_0$. Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака D, E и O.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Решење:

1) Који је случај сложеног кретања тела?

Слагање обртања крутог тела око паралелних оса угаоним брзинама истог смера

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 112-114)</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

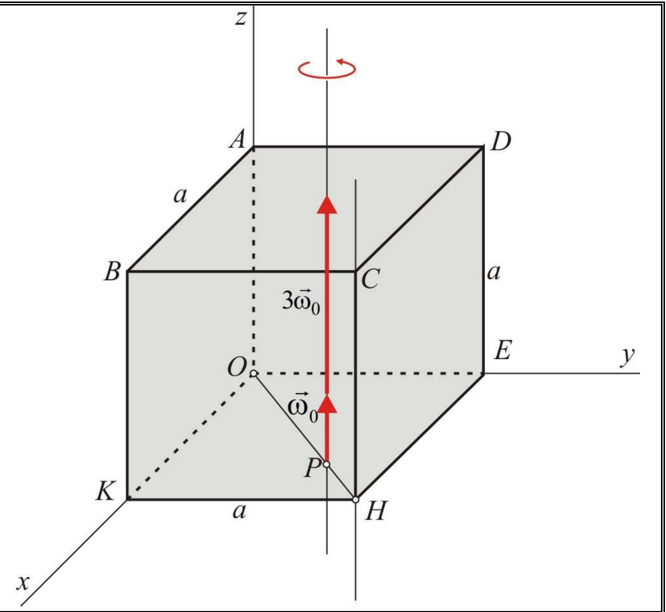
2) Вектор тренутне угаоне брзине једнак је збиру вектора преносне ($\vec{\omega}_0$) и релативне $(3\vec{\omega}_0)$ угаоне брзине:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + 3\vec{\omega}_0 = 4\vec{\omega}_0 = 4\omega_0 \vec{k}$$

тј. $\left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}\right) \sim \vec{\omega}$

Тренутна оса ротације припада равни вектора преносне и релативне угаоне брзине и дели растојање између поменутих оса у односу, обрнуто пропорционалном односу интензитета угаоних брзина:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{3\omega_0}{\overline{OP}} = \frac{\omega_0}{\overline{HP}} = \frac{4\omega_0}{\overline{HO}} \\ &\overline{HO} = a\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\overline{OP} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \\ &\overline{HP} = \frac{a\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



3) Координате тачке P: $P\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}a, 0\right)$

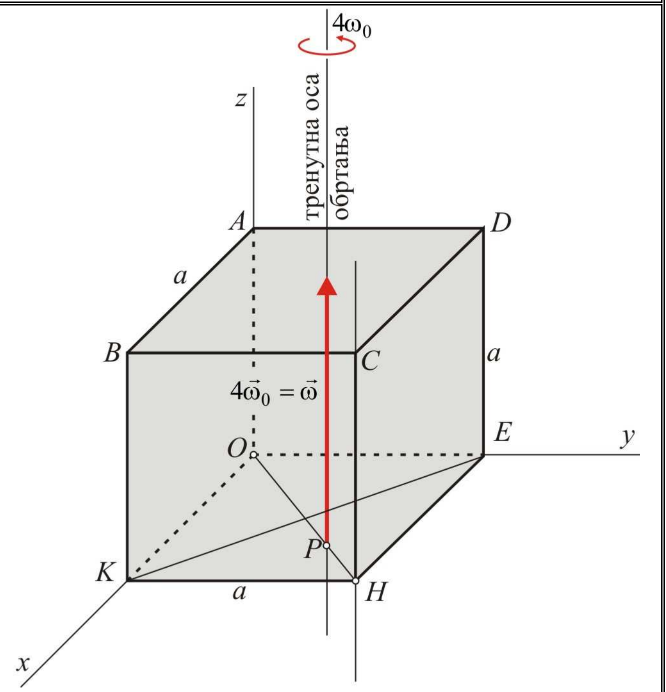
4) Брзине тачака D, E и O је могуће одредити користећи Ојлерову формулу (релација 2.27 страна 47, Младеновић). За то су потребне координате одговарајућих тачака:

$O(0,0,0)$, $E(0,a,0)$, $D(0,a,a)$

$$\vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PO} = \overrightarrow{OP} \times \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{3a}{4} - 0 & \frac{3a}{4} - 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \end{vmatrix}$$

$\vec{v}_O = 3a\omega_0 \vec{i} - 3a\omega_0 \vec{j}$ - што је јасно из поставке задатка јер се тачка O налази на преносној оси обртања, и има само релативну брзину:

$$\vec{v}_O = \vec{v}_{Orel} + \vec{v}_{Opr} = \vec{v}_{Orel} + 0 = \underbrace{3\vec{\omega}_0}_{\vec{\omega}_{rel}} \times \overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH} \times 3\vec{\omega}_0$$



$$\vec{v}_E = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PE} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ x_E - x_P & y_E - y_P & z_E - z_P \end{vmatrix}$$

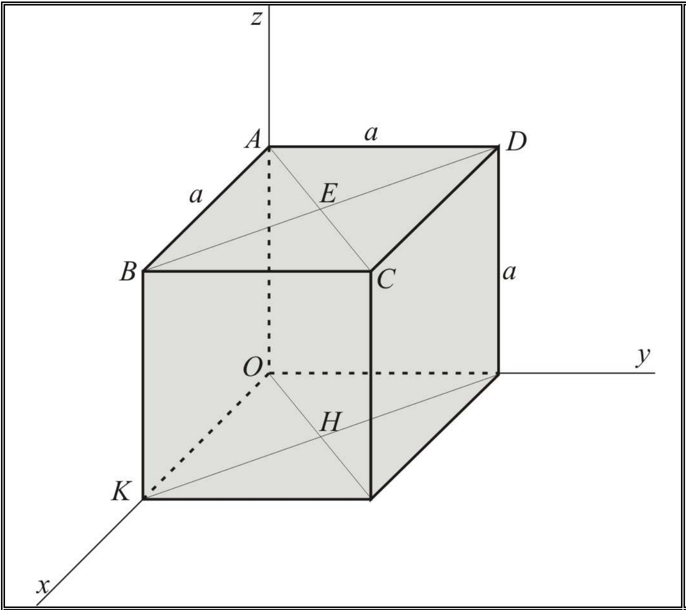
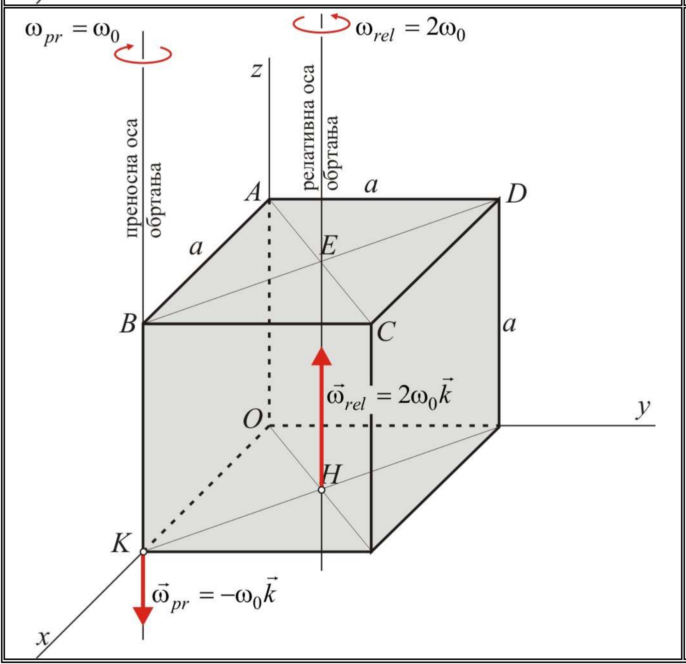
$$\vec{v}_E = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ 0 - \frac{3}{4}a & a - \frac{3}{4}a & 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0 \vec{i} - 3a\omega_0 \vec{j}$$

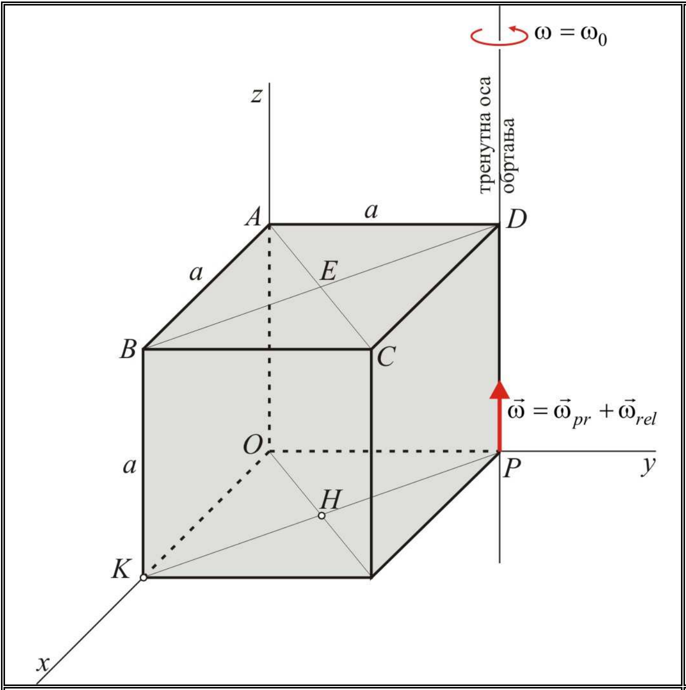
$$\vec{v}_D = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ x_D - x_P & y_D - y_P & z_D - z_P \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_D = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 4\omega_0 \\ 0 - \frac{3}{4}a & a - \frac{3}{4}a & a - 0 \end{vmatrix} = -a\omega_0 \vec{i} - 3a\omega_0 \vec{j}$$

$\vec{v}_D = \vec{v}_E$ што је очигледно јер је

$\overline{ED} \parallel$ *са тренутном осом обртања*

	**Задатак 3.** Коцка, ивице a, обрће се око осе EH, угаоном брзином $\vec{\omega}_1 = 2\omega_0\vec{k}$, и истовремено око ивице BK, угаоном брзином $\vec{\omega}_2 = -\omega_0\vec{k}$. Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака B, C и O ($\overline{EH} \parallel Oz$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$).
	**Решење:** 1) Који је случај сложеног кретања тела? **Слагање обртања крутог тела око паралелних оса угаоним брзинама супротног смера** (Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 112-114)



2) Вектор тренутне угаоне брзине једнак је збиру вектора преносне ($\vec{\omega}_0$) и релативне $(3\vec{\omega}_0)$ угаоне брзине:

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_{pr}+\vec{\omega}_{rel}=-\omega_0\vec{k}+2\omega_0\vec{k}=\omega_0\vec{k}$$

тј. $\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel}\right)\sim\vec{\omega}$

Тренутна оса ротације припада равни вектора преносне и релативне угаоне брзине, а њен положај је одређен релацијом:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\omega_{pr}}{\overline{HP}}=\frac{\omega_{rel}}{\overline{KP}}=\frac{\omega}{\overline{HK}}\\&\overline{HK}=\frac{a\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \frac{\omega_0}{\overline{HP}}=\frac{2\omega_0}{\overline{KP}}=\frac{\omega_0}{\frac{a\sqrt{2}}{2}},\qquad \overline{HP}=\frac{a\sqrt{2}}{2},\ \overline{KP}=a\sqrt{2}$$

3) Координате тачке P: $P(0,a,0)$

4) Брзине тачака B, C и O

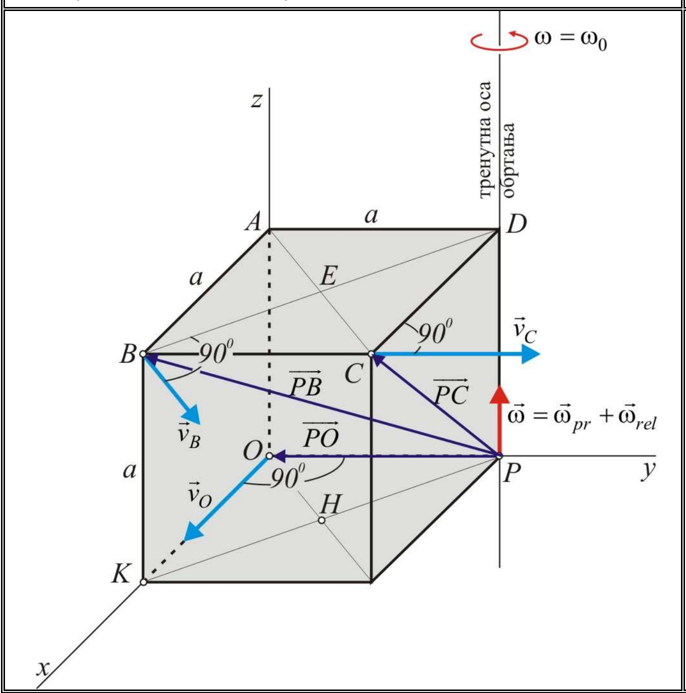
Координате тачака B, C и O: $B(a,0,a)$, $C(a,a,a)$, $O(0,0,0)$

$$\vec{v}_B=\vec{\omega}\times\overrightarrow{PB}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_0\\x_B-x_P&y_B-y_P&z_B-z_P\end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_B=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_0\\a-0&0-a&a-0\end{vmatrix}=a\omega_0\vec{i}+a\omega_0\vec{j}$$

$$\vec{v}_C=\vec{\omega}\times\overrightarrow{PC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_0\\x_C-x_P&y_C-y_P&z_C-z_P\end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_C=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_0\\a-0&a-a&a-0\end{vmatrix}=a\omega_0\vec{j}$$

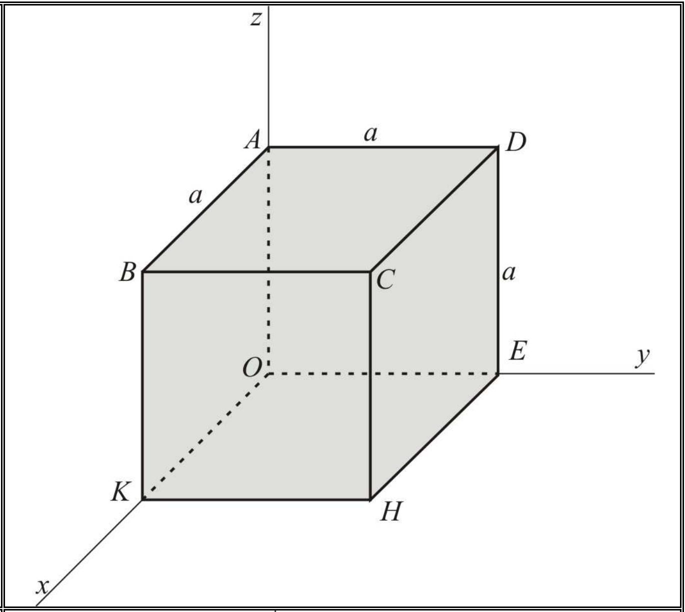


$$\vec{v}_O=\vec{\omega}\times\overrightarrow{PO}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_0\\x_O-x_P&y_O-y_P&z_O-z_P\end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_O=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\0&0&\omega_0\\0-0&0-a&0-0\end{vmatrix}=a\omega_0\vec{i}$$

Треба уочити да важи $\vec{v}_K=\vec{v}_B,\quad \vec{v}_A=\vec{v}_O$

<u>**Задатак 4.**</u> Коцка, ивице a, обрће се око Oz осе у позитивном математичком смеру, једнолико са 120 обртаја у минути, и истовремено обрће се око Ox осе у позитивном математичком смеру, такође једнолико са 90 обртаја у минути Одредити резултујуће кретање коцке, као и брзине тачака D, E и O.



Решење:

1) Који је случај сложеног кретања тела?

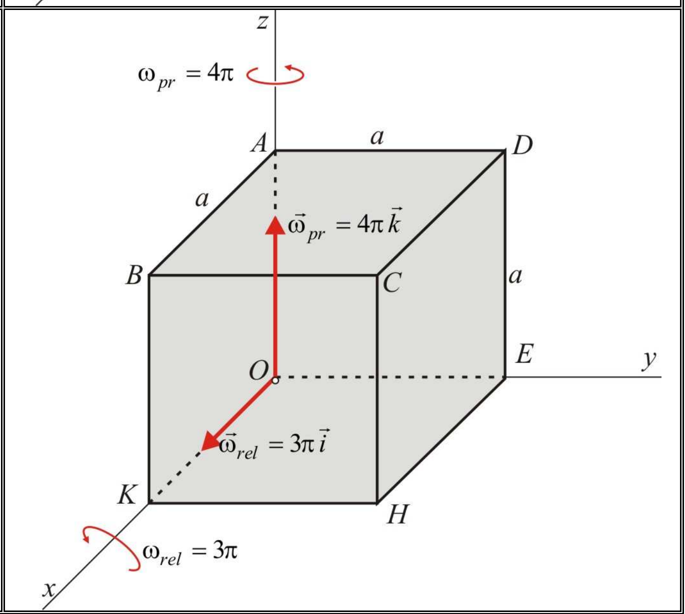
Слагање обртања крутог тела око оса које се секу

(Никола Младеновић, Механика 2 – Кинематика, страна 111-112)

Нека је обртање око осе Oz преносно, а обртање око осе Ox релативно.Следи:

$$\omega_{pr} = \frac{\pi n_{pr}}{30} = \frac{\pi \cdot 120}{30} = 4\pi\, s^{-1}$$

$$\omega_{rel} = \frac{\pi n_{rel}}{30} = \frac{\pi \cdot 90}{30} = 3\pi\, s^{-1}$$



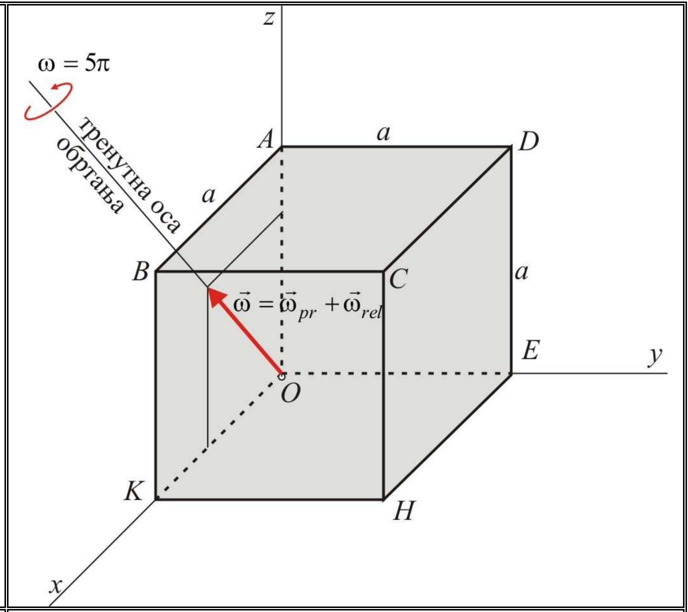
2) Резултат слагања два истовремена обртања крутог тела око оса које се секу је апсолутно кретање представљено обртањем око тренутне осе ротације која пролази кроз пресечну тачку оса преносног и релативног кретања. Вектор тренутне (апсолутне) угаоне брзине тела једнак је векторском збиру преносне и угаоне брзине:

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}_{rel}+\vec{\omega}_{pr}=3\pi\vec{i}+4\pi\vec{k},\quad \omega=\sqrt{(3\pi)^2+(4\pi)^2}$$

$$\omega=5\pi\ s^{-1},\quad \left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel}\right)\sim\vec{\omega}$$

Једначина осе резултујућег обртања је:

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{0}=\frac{z}{4}$$



3) Брзине тачака D, E и O.
Њихове координате:
$O(0,0,0)$, $E(0,a,0)$, $D(0,a,a)$

Тачка O се налази на тренутној оси обртања и следи $\vec{v}_O=0$

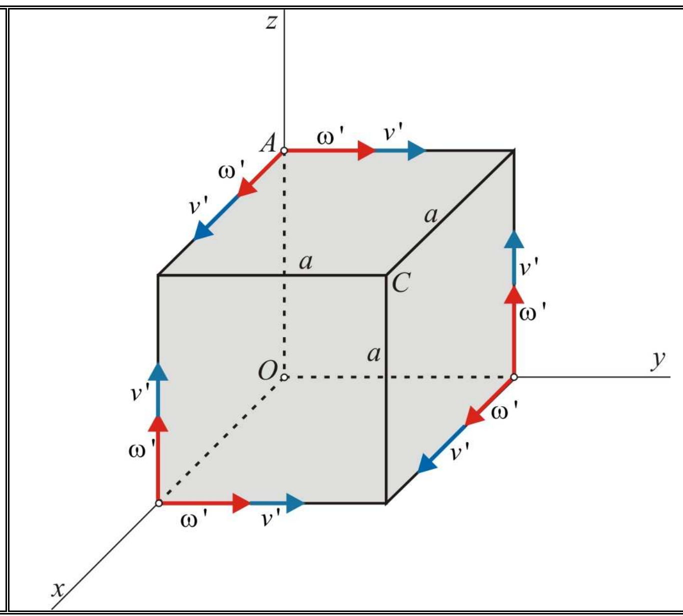
$$\vec{v}_E=\vec{\omega}\times\overline{OE}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3\pi&0&4\pi\\0&a&0\end{vmatrix}=-4a\pi\vec{i}+3a\pi\vec{k}$$

$$\vec{v}_D=\vec{\omega}\times\overline{OD}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3\pi&0&4\pi\\0&a&a\end{vmatrix}=-4a\pi\vec{i}+3a\pi\vec{k}$$

Напомена:
Уместо тачке О могуће је у Ојлеровој формули узети било коју тачку на тренутној оси ротације. Резултат ће бити исти. Проверити и размислити зашто!!

Задатак 5. Коцка, ивице a, изводи истовремено шест завојних кретања као на слици. Одредити резултујуће кретање, ако је обртање једнолико са 60 обртаја у минути, а интензитет једне од брзина транслације је $v'=5\dfrac{cm}{s}$.

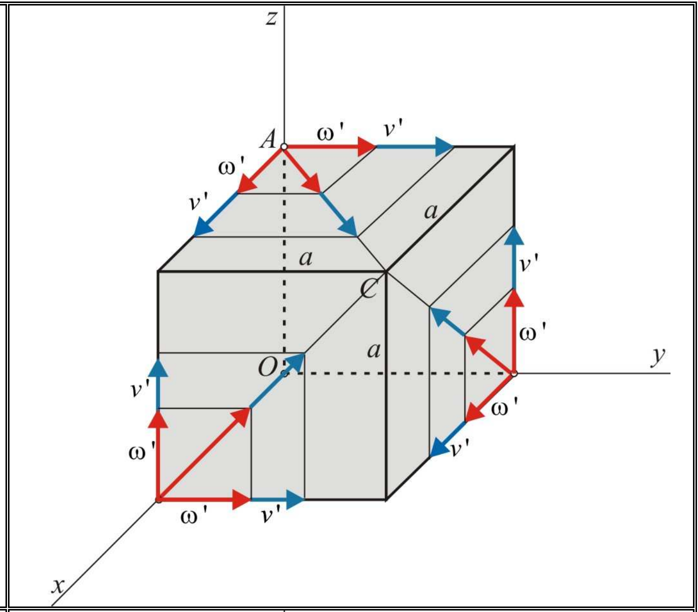
Напомена. Изгледа 'страшно', али није тешко ☺



Решење:

Интензитет угаоне брзине једног обртања је: $\omega' = \dfrac{\pi n}{30} = 2\pi \ \ s^{-1}$

Могуће је сложити одговарајуће сучељне парове угаоних брзина и брзина као на слици.



$$\vec{v} = 2v'\vec{i} + 2v'\vec{j} + 2v'\vec{k}$$

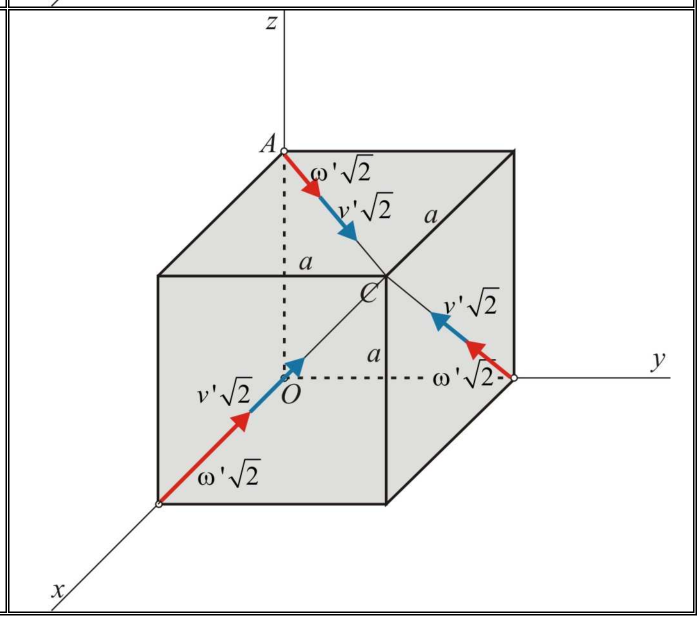
$$\vec{v} = 10\vec{i} + 10\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$v = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}\,\frac{cm}{s}$$

$$\vec{\omega} = 2\omega'\vec{i} + 2\omega'\vec{j} + 2\omega'\vec{k}$$

$$\vec{\omega} = 4\pi\vec{i} + 4\pi\vec{j} + 4\pi\vec{k}$$

$$\omega = \sqrt{16\pi^2 + 16\pi^2 + 16\pi^2} = 4\pi\sqrt{3} \ \ \frac{1}{s}$$



Резултујуће кретање је тренутно завојно кретање крутог тела, угаоном брзином $\vec{\omega}=4\pi\vec{i}+4\pi\vec{j}+4\pi\vec{k}$ интензитета $\omega=4\pi\sqrt{3}\ s^{-1}$, око тренутне завојне осе која пролази кроз тачке O и C.

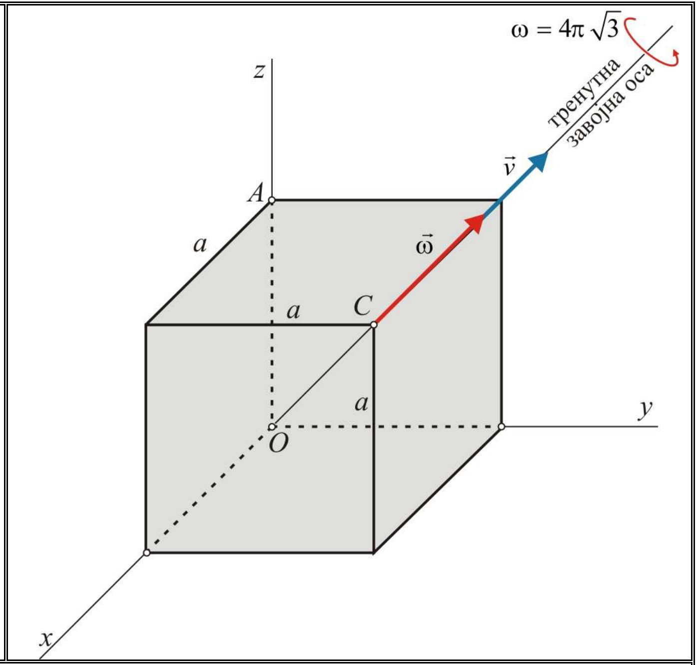
Параметар завртња

$$p=\frac{v}{\omega}=\frac{10\sqrt{3}}{4\pi\sqrt{3}}=\frac{5}{2\pi}cm$$

Једначина тренутне завојне осе:

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$$

Завојно кретање се не може даље упростити.

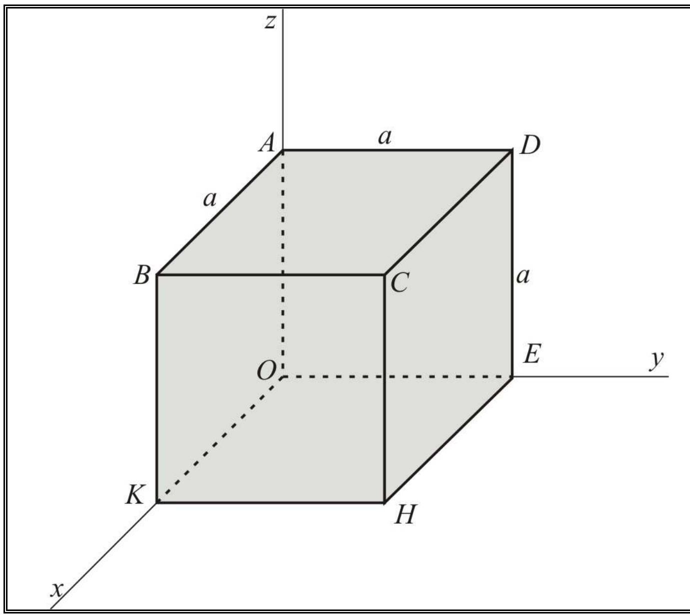


Сада је могуће израчунати брзину било које тачке на коцки.
Пример тачке А:

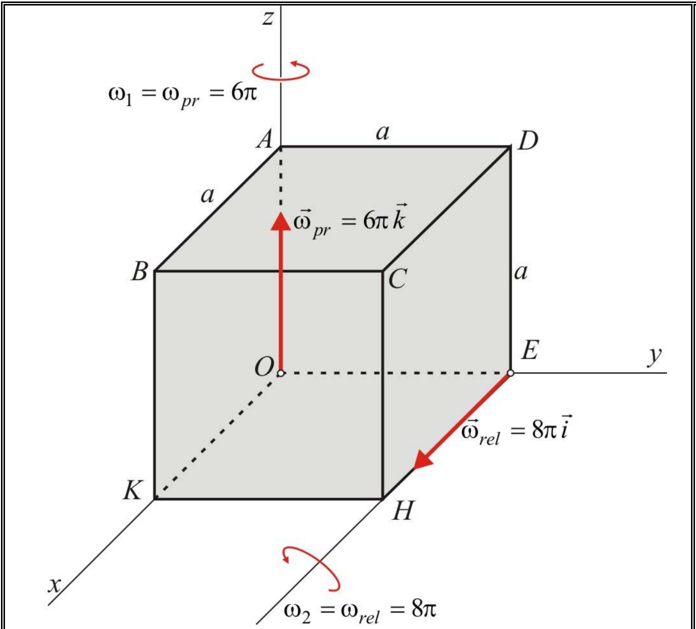
$$\vec{v}_A=\vec{v}+\vec{\omega}\times\overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_A=10\vec{i}+10\vec{j}+10\vec{k}+\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4\pi & 4\pi & 4\pi\\ 0 & 0 & a\end{vmatrix}=10\vec{i}+10\vec{j}+10\vec{k}+4\pi a\vec{i}-4\pi a\vec{j}$$

$$\vec{v}_A=\left(10+4\pi a\right)\vec{i}+\left(10-4\pi a\right)\vec{j}+10\vec{k}$$



<u>Задатак 6.</u> Коцка, ивице $a=10cm$, обрће се око Oz осе у позитивном математичком смеру, једнолико са 180 обртаја у минути, и истовремено обрће се око ивице EH осе у позитивном математичком смеру, такође једнолико са 240 обртаја у минути Одредити резултујуће кретање коцке.



Решење:

1) Који је случај сложеног кретања тела?

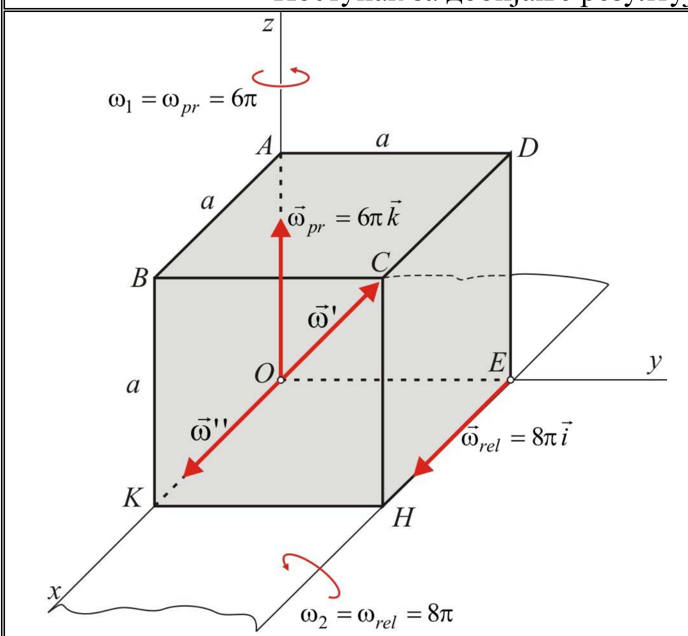
Слагање обртања крутог тела око оса које се мимоилазе

Нека је обртање око осе Oz преносно, а обртање око ивице EH релативно.Следи:

$$\omega_{pr} = \frac{\pi n_{pr}}{30} = \frac{\pi \cdot 180}{30} = 6\pi\, s^{-1}$$

$$\omega_{rel} = \frac{\pi n_{rel}}{30} = \frac{\pi \cdot 240}{30} = 8\pi\, s^{-1}$$

Поступак за добијање резултујућег кретања у овом случају:



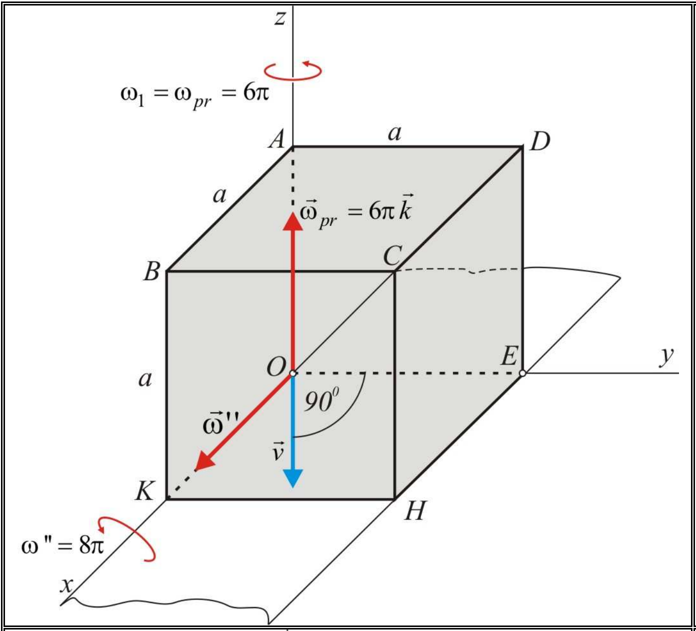
2) У тачки O додаје се систем вектора $(\vec{\omega}'', \vec{\omega}') \sim 0$

Вектори $\vec{\omega}', \vec{\omega}''$ се бирају тако да важи

$$\vec{\omega}_{rel} = \vec{\omega}'', \quad \vec{\omega}_{rel} = -\vec{\omega}'$$

Сада је:

$$\left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}\right) \sim \left(\vec{\omega}_{pr}, \vec{\omega}_{rel}, \vec{\omega}', \vec{\omega}''\right)$$



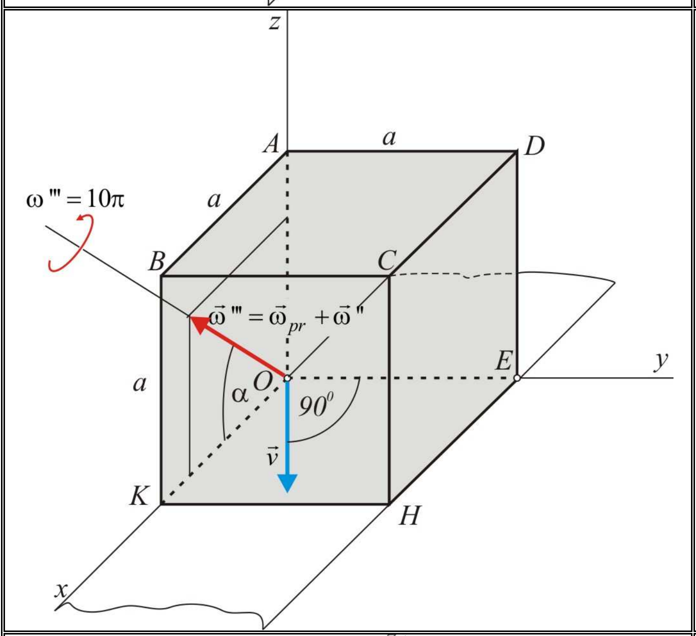
3) Кинематички спрег $\left[\vec{\omega}';\vec{\omega}_{rel}\right]$ се може заменити вектором брзине $\vec{v}$ (као на слици), тако да се почетни систем мимоилазних вектора $\vec{\omega}_{rel}$ и $\vec{\omega}_{pr}$ може трансформисати на следећи начин:

$$\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel}\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel},\vec{\omega}',\vec{\omega}''\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{v},\vec{\omega}''\right)$$

Брзина транслације $\vec{v}$ може се одредити применом релације:

$$\vec{v}=\vec{\omega}_{rel}\times\overrightarrow{EO}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8\pi & 0 & 0\\ 0 & -a & 0\end{vmatrix}=-8a\pi\vec{k}$$

(прочитати о кинамитичком спрегу – књига Младеновић, страна 115 и 116).



4) Сучељни вектори $\vec{\omega}''$ и $\vec{\omega}_{pr}$ могу се векторски сабрати:

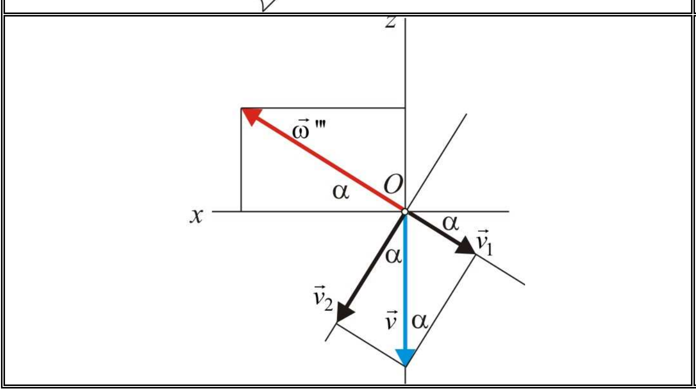
$$\vec{\omega}'''=\vec{\omega}''+\vec{\omega}_{pr}=8\pi\vec{i}+6\pi\vec{k},\qquad \omega'''=10\pi$$

$$\cos\alpha=\frac{\omega''}{\omega'''}=\frac{8\pi}{10\pi}=\frac{4}{5},\qquad \sin\alpha=\frac{\omega_{pr}}{\omega'''}=\frac{6\pi}{10\pi}=\frac{3}{5}$$

Почетни систем мимоилазних вектора $\vec{\omega}_{rel}$ и $\vec{\omega}_{pr}$ сада добија препознатљив облик:

$$\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel}\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{\omega}_{rel},\vec{\omega}',\vec{\omega}''\right)\sim\left(\vec{\omega}_{pr},\vec{v},\vec{\omega}''\right)\sim\left(v,\vec{\omega}'''\right)$$

Овај случај сложеног кретања је урађен у задатку број 1 – то је случај када <u>брзина транслаторног кретања гради произвољан угао са осом обртања</u>. Наставак решавања задатка је аналоган са поступком у задатку 1.

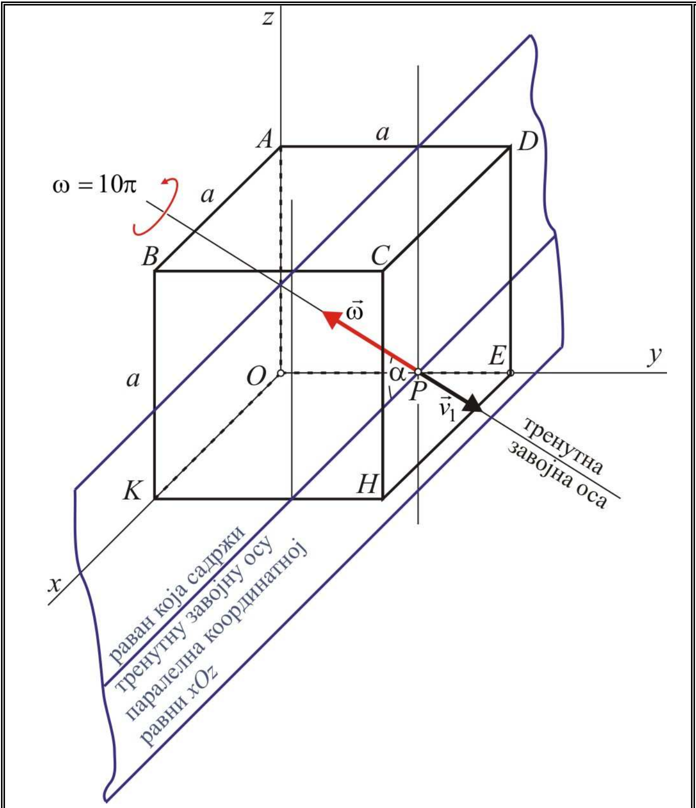


5) Дакле, у том поступку следи разлагање вектора брзине $\vec{v}$ на две компоненте (једна у правцу осе ротације, а друга управна на тај правац)

Интензитети тих компоненти су:

$$v_1=v\sin\alpha=8\pi a\cdot\frac{3}{5}=\frac{24}{5}\pi a$$

$$v_2=v\cos\alpha=8\pi a\cdot\frac{4}{5}=\frac{32}{5}\pi a$$



6) Компоненту $\vec{v}_2$ могуће је заменити кинематичким спрегом $\vec{v}_2 \sim [\vec{\omega}'''';\vec{\omega}]$ са особином: $\vec{\omega}=\vec{\omega}'''$, $\vec{\omega}''''=-\vec{\omega}'''$ (то није нацртано на слици, то је задатак за читаоце).

Положај тачке P (видети задатак 1):

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\vec{\omega}'''\times\vec{v}_2}{\omega'''^2}=\frac{1}{(10\pi)^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8\pi & 0 & 6\pi\\ v_2\sin\alpha & 0 & -v_2\cos\alpha\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{(10\pi)^2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8\pi & 0 & 6\pi\\ \frac{32}{5}\pi a\frac{3}{5} & 0 & -\frac{32}{5}\pi a\frac{4}{5}\end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{64\pi^2 a}{(10\pi)^2}\vec{j}=\frac{16}{25}a\vec{j}$$

Значи, резултујуће кретање коцке је завојно кретање.

Параметар кинематичког завртња: $p=\frac{v_1}{\omega}=\frac{\frac{24}{5}\pi a}{10\pi}=\frac{24}{50}a=4.8cm$

Једначина тренутне завојне осе (оса кинематичког завртња):

$\frac{x}{8}=\frac{y-\frac{16}{25}a}{0}=\frac{z}{6}$ или ако је разумљивије: $y=\frac{16}{25}a,\quad z=\frac{6}{8}x$

Задатак 7. Тело изводи истовремено два обртања у позитивном математичком смеру око оса Oy и Oz са 60 об/мин и 80 об/мин респективно, и транслаторно кретање у смеру Oy осе брзином 5 м/с. Одредити резултујуће кретање крутог тела.

Решење.

Тренутно завојно кретање.

Интензитет брзине завртња: 3 м/с

Тренутна угаона брзина: $\omega=\frac{10\pi}{3}$, $\quad\vec{\omega}=2\pi\vec{j}+\frac{8\pi}{3}\vec{k}$

Параметар завртња: $p=\frac{9}{10\pi}$

Положај тачке P: $\overrightarrow{OP}=-\frac{6}{5\pi}\vec{i}$

Једначина тренутне завојне осе: $\frac{x+\frac{6}{5\pi}}{0}=\frac{y}{2\pi}=\frac{3z}{8\pi}$

Задатак 8. (факултативно) Период обртања Сунчевих пега, посматрано са Земље, једнак је 29,6 дана. Одредити стварни период обртања ових пега, ако је познато да се Сунце обрће у истом смеру у коме се око њега креће Земља. Годину узети једнаку 365 дана. Нагиб Земљине осе према равни еклиптике не узимати у обзир.

Решење: $T_s = 27.38$ дана

Задатак 9. (факултативно) Тело, обрћући се око Земље по кружној орбити, налази се у неком тренутку на правој која спаја центре Земље и Месеца, и има период обртања око Земље, једнак T_1. Ако је познато да је период обртања Месеца око Земље једнак T_2, одредити кроз колико времена T ће тело опет бити на правој Земља – Месец, ако се раван његове орбите поклапа са равни Месечеве орбите. Периоди T_1 и T_2 су израчунати у односу на систем који се креће заједно са центром Земље праволинијски у односу на звезде.

Решење: $T = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ - при супротним смеровима обртања тела и Месеца у односу на Земљу.

$T = \frac{T_1 T_2}{|T_1 - T_2|}$ - при једнаким смеровима њиховог кретања.

Designed by NT, Dec.2009