

7 Интерполација функција - део 2

7.1 Коначне разлике функција

Нека је дата мрежа еквидистантних чворова $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots$ и нека су познате вредности функције у тим чворовима $y_i = f(x_i)$.

- Коначне разлике првог реда су $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.
- Коначне разлике другог реда су $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$.
- Коначне разлике n -тог реда су $\Delta^n y_i = \Delta^{n-1} y_{i+1} - \Delta^{n-1} y_i$.

Наводимо неке особине коначних разлика.

1. Ако је $f(x) = u(x) + v(x)$, тада је $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$,
2. Ако је $f(x) = c \cdot u(x)$, тада је $\Delta(cu) = c\Delta u$,
3. $\Delta^m(\Delta^n f) = \Delta^{m+n} f = \Delta^n(\Delta^m f)$,
4. Ако је $f(x) = P_n(x)$ полином n -тог степена, тада је ΔP_n полином $n - 1$ -вог степена.

За доказ особине 4. нека је $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Тада је

$$\Delta P_n(x) = P_n(x+h) - P_n(x) = a_n(x+h)^n + \dots + a_1(x+h) + a_0 - (a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0) = b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Следи да су n -те разлике полинома n -тог степена константне, а разлике вишег реда од n су једнаке нули.

Теорема 7.1. Ако је $f \in C^n[x_i, x_{i+n}]$, онда постоји тачка $\eta \in (x_i, x_{i+n})$ таква да је

$$\Delta^n f_i = \Delta^n y_i = h^n f^{(n)}(\eta).$$

Доказ се спроводи математичком индукцијом. Приметимо да за $n = 1$ резултат следи из теореме о средњој вредности, $\Delta y_i = h \cdot f'(\eta)$, $\eta \in (x_i, x_{i+1})$.

На основу претходне теореме имамо приближну једнакост

$$f^{(n)}(x) \approx \frac{\Delta^n f(x)}{h^n}.$$

Коначне разлике се могу представити и у табели коначних разлика, нпр. за $n = 4$:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_0	y_0				
		Δy_0			
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		
		Δy_3			
x_4	y_4				

Пример 7.1. Саставити дијагоналну табели коначних разлика за функцију $f(x) = x^3 + 8x + 5$ на интервалу $[0, 1]$ са кораком $h = 0.2$. Вредности функције рачунати са тачношћу $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	5.0000			
0.2	6.6080	1.6080		
0.4	8.2640	1.6560	0.0480	0.0480
0.6	10.0160	1.7520	0.0960	0.0480
0.8	11.9120	1.896	0.1440	0.0480
1	14.0000	2.0880	0.1920	

Приликом састављања таблица коначних разлика, може се уочити законистост простирања омашке. Претпоставимо да је уместо вредности функције y_i омашком узета вредност $y_i + \varepsilon$ и посматрајмо простирање те омашке у табели коначних разлика.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
x_{i-4}	y_{i-4}				
x_{i-3}	y_{i-3}	Δy_{i-3}	$\Delta^2 y_{i-4}$		
x_{i-2}	y_{i-2}	Δy_{i-2}	$\Delta^2 y_{i-3}$	$\Delta^3 y_{i-4}$	
x_{i-1}	y_{i-1}	Δy_{i-1}	$\Delta^2 y_{i-2} + \varepsilon$	$\Delta^3 y_{i-3} + \varepsilon$	$\Delta^4 y_{i-4} + \varepsilon$
x_i	$y_i + \varepsilon$	$\Delta y_i + \varepsilon$	$\Delta^2 y_{i-1} + 2\varepsilon$	$\Delta^3 y_{i-2} - 3\varepsilon$	$\Delta^4 y_{i-3} - 4\varepsilon$
x_{i+1}	y_{i+1}	$\Delta y_i - \varepsilon$	$\Delta^2 y_i + \varepsilon$	$\Delta^3 y_{i-1} + 3\varepsilon$	$\Delta^4 y_{i-2} + 6\varepsilon$
x_{i+2}	y_{i+2}	Δy_{i+1}	$\Delta^2 y_{i+1}$	$\Delta^3 y_i - \varepsilon$	$\Delta^4 y_{i-1} - 3\varepsilon$
x_{i+3}	y_{i+3}	Δy_{i+2}	$\Delta^2 y_{i+2}$	$\Delta^3 y_{i+1}$	$\Delta^4 y_i + \varepsilon$
x_{i+4}	y_{i+4}	Δy_{i+3}			

Приметимо да су коефицијенти уз ε у колони $\Delta^k y$ биномни коефицијенти бинома $(a - b)^k$ и да је у колонама парних разлика највећи утицај омашке у оном реду у коме је омашка настала. Ако се уз то искористи и чињеница да се очекује да разлике довољно високог реда буду јако сличне, омашка се може открити, израчунати и одклонити.

Претпоставимо сада да је горња граница апсолутне грешке израчунатих вредности функције $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$. Онда је горња граница апсолутних грешака коначних разлика:

- првог реда: $\frac{1}{2} \cdot 10^{-k} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-k} = 10^{-k}$,
- другог реда: $10^{-k} + 10^{-k} = 2 \cdot 10^{-k}$
- n -тог реда: $2^{n-1} \cdot 10^{-k}$,

па је утицај почетних разлика све већи (а коначне разлике су све мање). Ако се догоди за неку вредност y_i важи

$$|\Delta^n y_i| \leq 2^{n-1} \cdot 10^{-k},$$

тј. коначна разлика n -тог реда је мања од максимално могуће грешке те разлике, онда су таблице коначних разлика од тог реда па надаље некоректне и не могу се користити.

7.2 Први Њутнов интерполациони полином

Нека су $y_i = f(x_i)$ задате вредности функције у еквидистантним чворовима x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Треба наћи интерполациони полином $P_n(x)$ који задовољава услове

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Потражимо интерполациони полином у облику

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

За $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ редом добијамо

$$x = x_0 : \quad y_0 = a_0,$$

$$x = x_1 : \quad y_1 = a_0 + a_1(x_1 - x_0), \quad a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h},$$

$$x = x_2 : \quad y_2 = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x - x_1), \quad a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}.$$

Аналогно добијамо

$$a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n},$$

одакле добијамо *први Њутнов интерполациони полином* (са коначним разликама за еквидистантне чворове):

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Ако уведемо смену $\frac{x - x_0}{h} = u$ добијамо

$$P_n(x_0 + hu) = P_n(u) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}u + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}u(u - 1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}u(u - 1) \dots (u - n + 1),$$

или

$$P_n(u) = \binom{u}{0} \Delta^0 y_0 + \binom{u}{1} \Delta y_0 + \dots + \binom{u}{n} \Delta^n y_0.$$

Овај полином је погодно користити око тачке $x = x_0$.

Грешка првог Њутновог полинома се добија из опште формуле за грешку интерполације

$$R_n(u) = \frac{h^{n+1} f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!} u(u-1) \dots (u-n) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} u(u-1) \dots (u-n), \quad \eta \in (x_0, x_n).$$

7.3 Други Њутнов интерполациони полином

Ако интерполациони полином тражимо у облику

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

За $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$ редом добијамо

$$x = x_n : \quad y_n = a_0,$$

$$x = x_{n-1} : \quad y_{n-1} = a_0 + a_1(x_{n-1} - x_n), \quad a_1 = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{\Delta y_{n-1}}{h}.$$

Аналогно добијамо

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i!h^i}, \quad a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n},$$

одакле добијамо *други Њутнов интерполациони полином* (са коначним разликама за еквидистантне чворове):

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Ако уведемо смену $\frac{x-x_n}{h} = v$ добијамо

$$P_n(v) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1!}v + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}v(v+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}v(v+1)\dots(v+n-1).$$

Овај полином је погодно користити око тачке $x = x_n$.

Грешка првог Њутновог полинома се добија из опште формуле за грешку интерполације

$$R_n(v) = \frac{h^{n+1} f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!} v(v+1)\dots(v+n) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} v(v+1)\dots(v+n), \quad \eta \in (x_0, x_n).$$

7.4 Подељене разлике

Предпоставимо да чворови x_0, x_1, \dots, x_n у којима је дата функција y нису једнако размакнута.

Подељене разлике првог реда су:

$$\delta(x_i, x_{i+1}) = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Користе се и следеће ознаке

$$\delta(x_i, x_{i+1}) = \delta^1 = f[x_i, x_{i+1}] = [x_i, x_{i+1}] = [x_i, x_{i+1}; f].$$

Подељене разлике другог реда су:

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}) - \delta(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-2.$$

Користе се и следеће ознаке

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \delta^2 = f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}; f].$$

Уопште, подељене разлике k -тог реда су

$$\delta(x_i, \dots, x_{i+k}) = \frac{\delta(x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{i+k}) - \delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0, 1, \dots, n-k.$$

Користе се и следеће ознаке

$$\delta(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}) = \delta^k = f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] = [x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; f].$$

Подељене разлике је, као и коначне, прегледно записати у табlici.

x	y	δ^1	δ^2	\dots	δ^n
x_0	y_0				
x_1	y_1	$\delta(x_0, x_1)$			
x_2	y_2	$\delta(x_1, x_2)$	$\delta(x_0, x_1, x_2)$		
x_3	y_3	$\delta(x_2, x_3)$	$\delta(x_1, x_2, x_3)$		
\vdots	\vdots	\vdots	$\delta(x_2, x_3, x_4)$		
x_{n-3}	y_{n-3}		$\delta(x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2})$		$\delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$
x_{n-2}	y_{n-2}	$\delta(x_{n-3}, x_{n-2})$	$\delta(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1})$		
x_{n-1}	y_{n-1}	$\delta(x_{n-2}, x_{n-1})$	$\delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		
x_n	y_n	$\delta(x_{n-1}, x_n)$			

Подељене разлике су симетричне функције својих аргумената:

$$\delta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \delta(x_1, x_2, x_3, \dots, x_k) = \delta(x_2, x_1, x_3, \dots, x_n) = \delta(x_3, x_2, x_1, \dots, x_n) = \dots$$

Подељене разлике имају и следеће особине:

1. Подељене разлике збира једнаке су збиру подељених разлика сабирака.
2. Константа се може извући испред подељених разлика.
3. Подељене разлике првог реда полинома степена n су полиноми степена $n - 1$.

Да би смо доказали последњу особину, приметимо да на основу Безуовог става важи

$$P_n(x) = (x - x_i)Q_{n-1}(x) + P_n(x_i), \quad \text{па је} \quad P_n[x, x_i] = \frac{P_n(x) - P_n(x_i)}{x - x_i} = Q_{n-1}(x).$$

Следи да су подељене разлике n -тог реда полинома степена n константе, а полинома степена мањег од n једнаке нули.

Ако су чворови једнако размакнути, између коначних и подељених разлика постоји веза:

$$\delta^n y_k = \delta(x_k, x_k + h, \dots, x_k + nh) = \frac{\Delta^n y_k}{n!h^n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

7.5 Њутнови интерполациони полиноми са подељеним разликама

Нека је функција дата вредностима $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, при чему су чворови међусобно различити.

Први Њутнов полином са подељеним разликама је

$$P_n(x) = y_0 + \delta(x_0, x_1)(x - x_0) + \delta(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \delta(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Грешка интерполације је

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\eta)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad \eta \in (x_0, x_n).$$

Други Њутнов полином са подељеним разликама је

$$P_n(x) = y_n + \delta(x_{n-1}, x_n)(x - x_n) + \delta(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + \delta(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1).$$

Налажење Њутновог интерполационог полинома захтева формирање таблице подељених разлика (што није био случај код Лагранжовог), али приликом додавања новог чвора не морамо цео полином рачунати из почетка јер важи

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n) \delta(x_0, \dots, x_{n+1}).$$

Како у општем случају важи

$$f(x_m) = f(x_0) + (x_m - x_0)\delta(x_0, x_1) + (x_m - x_0)(x_m - x_1)\delta(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{m-1})\delta(x_0, x_1, \dots, x_m),$$

можемо формулисати наредну теорему о грешки интерполације (узимањем да је $x_m = x, m - 1 = n$).

Теорема 7.2. Ако функција f има коначне вредности у тачкама x_0, \dots, x_n, x , важи формула:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \omega(x)\delta(x_0, \dots, x_n, x), \quad \omega(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n). \quad (7.1)$$

Приметимо да је за израз за грешку у претходној формули потребна тачна вредност функције $f(x)$, која је непозната (ако се функција замени полиномом степена n , онда је подељена разлика реда $n + 1$ једнака нули). Напоменимо још да се, за разлику од коначних разлика, подељене разлике δ^n у општем случају не смањују када n расте (и нису сличне између себе за довољно велико n).

7.6 Инверзна интерполација

Нека је функција $y = f(x)$ задата својим вредностима $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$.

Поступак налажења аргумента x који одговара задатој вредности y функције $y = f(x)$, која није дата у табели, назива се инверзна или обратна интерполација.

Овај задатак се може решити применом Лагранжове интерполационе формуле: за то је довољно узети да је x функција и y променљива, $x = x(y)$. Наравно, потребно је претпоставити постојање инверзне функције. Лагранжов интерполациони полином је у овом случају облика

$$L_n(y) = \omega(y) \sum_{i=0}^n \frac{x_i}{(y - y_i)\omega'(y_i)}, \quad \omega(y) = (y - y_0)(y - y_1) \cdots (y - y_n).$$

7.7 Конвергенција интерполационог процеса

Поставља се питање да ли низ $L_n(x)$ интерполационих полинома непрекидне функције $f(x)$ конвергира ка функцији $f(x)$ када број чворова неограничено расте, тј. када $n \rightarrow \infty$. Наравно, низ L_n зависи и од расподеле чворова x_i , а не само од функције f . Сузимо зато проблем на једнако размакнуте чворове.

Наредни пример илуструје да се маскимална грешка интерполације може повећавати за већи број чворова и познат је као *Рунгеов феномен*.

Пример 7.2. Посматрајмо низ интерполационих полинома $L_n(x)$ за функцију $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на интервалу $[-5, 5]$, при чему су чворови једнако размакнута. Нека је $Er(n) = \max_{x \in [-5, 5]} |f(x) - L_n(x)|$. Овако дефинисана грешка интерполације за различите вредности n је приказана у наредној табели.

n	4	8	12	16	20	24
$Er(n)$	0.44	1.04	3.66	14.25	58.59	252.78

Иако се изводи функције $f(x)$ у пољу \mathbb{R} “лепо” понашају, продужењем на комплексну равн \mathbb{C} Тејлоров ред комплексно вредносне функције $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ конвергира само у јединичном диску, јер функција $f(z)$ има полове у тачкама $\pm i$.

Дефиниција 7.1. (Цела функција) Функција $f(x)$ се назива целом функцијом, ако се може приказати у облику степеног реда

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots,$$

који конвергира за свако $x \in [a, b]$. Дакле, f има изводе произвољног реда.

Може се показати да ако је функција $f(x)$ *цела*, тада низ интерполационих полинома за произвољан избор чворова равномерно конвергира ка функцији $f(x)$, $x \in [a, b]$.

8 Нумеричко диференцирање

Претпоставимо да треба нумерички одредити извод функције f која је дата таблично, или је њен аналитички израз јако компликован.

Један од могућих начина да се нумерички одреди извод је следећи: на уоченом одсечку $[a, b]$ функција $f(x)$ се замени интерполационим полиномом $P_n(x)$, а затим се стави да је

$$f'(x) \approx P'_n(x), \quad x \in [a, b].$$

На аналоган начин се поступа у случају налажења извода виших редова.

Ако је функција $f(x)$ довољно глатка и ако су растојања између чворова довољно мала на интервалу $[a, b]$, може се очекивати да се на том интервалу $f'(x)$ и $P'_n(x)$ не разликују много.

Ако је грешка интерполације

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x),$$

тада је грешка диференцирања

$$r_n(x) = R'_n(x) = f'(x) - P'_n(x).$$

За ред извода има смисла узети само $k < n$. Приметимо да је код интерполације грешка у чворовима једнака нули, док код диференцирања то не мора бити случај. Дакле, у општем случају, нумеричко диференцирање има мању тачност од интерполације.

Нека је функција $f(x)$ задата на скупу еквилидистантних тачака $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$. Да бисмо апроксимирали вредности извода $f'(x), f''(x), \dots$ на интервалу $[a, b]$, прво функцију $f(x)$ апроксимирамо интерполационим полиномом. Нека је то први Њутнов интерполациони полином

$$y = y_0 + \Delta y_0 \cdot u + \Delta^2 y_0 \frac{u(u-1)}{2!} + \dots, \quad u = \frac{x - x_0}{h}.$$

Како је

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{dy}{du},$$

важи

$$y'(x) = \frac{1}{h} \left[\Delta y_0 + \frac{\Delta y_0}{2} (2u-1) + \frac{\Delta^2 y_0}{6} (3u^2 - 6u + 1) + \frac{\Delta^3 y_0}{12} (2u^3 - 9u^2 + 11u - 3) + \dots \right].$$

Даље је

$$y''(x) = \frac{d(y')}{dx} = \frac{1}{h} \cdot \frac{d(y')}{du},$$

па је

$$y'' = \frac{1}{h^2} \left[\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 (u-1) + \frac{\Delta^4 y_0}{12} (6u^2 - 18u + 11) + \dots \right].$$

Поступак за налажење приближних вредности извода коришћењем другог Њутновог полинома је идентичан, а код Лагранжовог изводи се налазе директно.

Пример 8.1. Функција $y = f(x)$ је задата таблицом

x	0.40	0.45	0.50	0.55	0.60
$f(x)$	1.58365	1.68662	1.79744	1.91650	2.04424

Израчунати: а) $f'(0.40)$, б) $f''(0.40)$, в) $f'(0.42)$, г) $f'(0.59)$.

Саставимо таблицу коначних разлика

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0.40	<u>1.58365</u>	<u>0.10297</u>			
0.45	1.68662	0.11082	<u>0.00785</u>		
0.50	1.79744	0.11906	0.00824	<u>0.00039</u>	
0.55	1.91650	0.12774	0.00860	0.00036	<u>-0.00003</u>
0.60	2.04424				

а) За $u = (x - x_0)/h = 0$ применом (извода) првог Њутновог интерполационог полинома добијамо

$$f'(0.40) = \frac{1}{0.05} \left[0.10297 - \frac{0.00785}{2} + \frac{0.00039}{3} - \frac{-0.00003}{4} \right] = 1.98365.$$

Напомена: Могуће је и изводе у чворовима (осим евентуално крајњим) заменити нпр. приближним вредностима

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad \text{или} \quad y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

али на тај начин очекујемо да ћемо добити мању тачност. Нпр. у примеру под а)

$$f'(0.40) = f'(x_0) \approx \frac{\Delta y_0}{h} = \frac{0.10297}{0.05} = 2.0594.$$