11 Нумеричко решавање диференцијалних једначина

11.1 Ојлеров метод за диференцијалне једначине првог реда

Претпоставимо да желимо да нађемо приближно решење Кошијевог проблема

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 1. \tag{11.1}$$

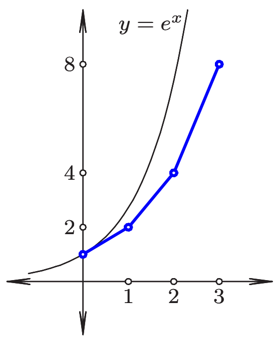
Како је у великом броју случајева тешко или немогуће одредити решење диференцијалне једначине (знамо да налазимо решења само одређених типова диференцијалних једначина, а и тада се могу појавити нееелементарни интеграли), ово питање се природно намеће.

Најпростији нумерички метод за приближно одређивање непознате функције $y(x)$ Кошијевог проблема (11.1) је Ојлеров метод који је илустрован у наредном примеру.

Пример 11.1. Претпоставимо да желимо да нађемо приближно решење диференцијалне једначине $y' = y$, уз почетни услов $y(0) = 1$.

Наравно, решење овог Кошијевог проблема је $y = e^x$. У наставку је описан Ојлеров метод за одређивање приближног решења y.

• Пођимо од тачке $(x_0, y_0) = (0, 1)$ која је дата као почетни (Кошијев) услов. Како је $y' = y$, следи да је $y'(x_0) = y_0 = 1$. Изаберимо нпр. корак $h = 1$.



• Претпоставимо да се на интервалу $[x_0, x_1]$ функција y апроксимира правом нагиба $y'(x_0) = 1$, при чему је y_0 познато. Тада је

$$y_1 = y_0 + y'(x_0) \cdot h = 1 + 1 \cdot 1 = 2,$$

па је (на основу дате диференцијалне једначине) $y'(x_1) = y_1 = 2$.

• Настављамо поступак: на интервалу $[x_1, x_2]$ функција y се апроксимира правом нагиба $y'(x_1) = 2$, уз познато y_1. Тада је

$$y_2 = y_1 + y'(x_1) \cdot h = 2 + 2 \cdot 1 = 4$$

и $y'(x_2) = y_2 = 4$.

Коначно, на интервалу $[x_2, x_3]$ функција y се апроксимира правом нагиба $y'(x_2) = 4$, уз познато y_2. Тада је

$$y_3 = y_2 + y'(x_2) \cdot h = 4 + 4 \cdot 1 = 8$$

и $y'(x_3) = y_3 = 8$.

Дакле, Ојлеров метод је итеративни метод за одређивање приближног решења y Кошијевог проблема (11.1) дат формулом

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)(x_{i+1} - x_i), \quad i = 0, 1, \ldots,$$

што се у случају еквидистантних чворова са кораком h своди на

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h, \quad i = 0, 1, \ldots.$$

Локална грешка Ојлеровог метода је грешка по кораку h. Ако је $y(x_1)$ тачно решење Кошијевог проблема (11.1) у тачки x_1, а y_1 приближно добијено Оејлровом методом (са кораком h), тада је локална грешка

$$R_L = y(x_1) - y_1 = y(x_1) - y(x_0) - hy'(x_0).$$

На основу Тејлоровог развоја функције y у тачки x_0 је

$$y(x_1) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(\eta_0), \quad \eta_0 \in (x_0, x_1), \quad \text{па је} \quad R_L = \frac{h^2}{2}y''(\eta_0).$$

Глобална грешка на $[x_0, x_n]$ је

$$R_G = \frac{h^2}{2}[y''(\eta_0) + y''(\eta_1) + \cdots + y''(\eta_{n-1})] = (x_n - x_0) \cdot \frac{h}{2}y''(\eta), \quad \eta \in [x_0, x_n].$$

Дакле, Ојлеров метод је:

- експлицитан, јер је y_{i+1} експлицитна функција од y_i,
- првог реда, јер је локална грешка пропорционална квадрату корака h^2, а глобална грешка је пропорционална кораку h.

11.2 Примена Ојлеровог метода на решавање диференцијалних једначина вишег реда

Користимо особину да се диференцијална једначина n-тог реда може написати као систем диференцијалних једначина првог реда.

Нека је дата диференцијална једначина $y^n(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n-1}(x))$, корак h и почетни услови $y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$. Ојлеров метод се имплементира формулом

$$\begin{bmatrix} y_{i+1} \\ y'_{i+1} \\ \vdots \\ y_{i+1}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_i + h \cdot y'_i \\ y'_i + h \cdot y''_i \\ \vdots \\ y_i^{(n-1)} + h \cdot f(x_i, y_i, y'_i, \dots, y_i^{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Пример 11.2. Користећи Ојлеров метод апроксимирати решење диференцијалне једначине

$$y''(x) = y'(x) - 2y(x) \quad y'(0) = y(0) = 1, \quad h = 0.2.$$

За $i \geqslant 0$ рачунамо итерације

$$\begin{aligned} y''_i &= y'_i - 2y_i, \\ y_{i+1} &= y_i + hy'_i, \\ y'_{i+1} &= y'_i + hy''_i \end{aligned}$$

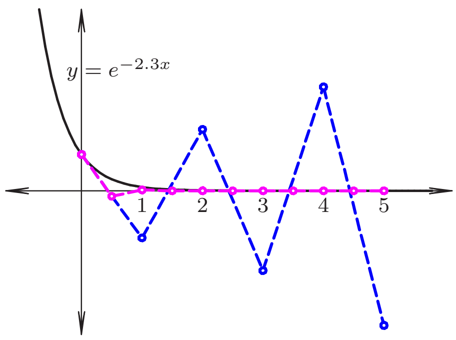
и добијамо вредности

i	x_i	y_i	y'_i	y''_i
0	0	1	1	-1
1	0.2	1.2	0.8	-1.6
2	0.4	1.36	0.48	-2.24
3	0.6	1.456	0.032	-2.88

11.3 Стабилност Ојлеровог метода

Ојлеров метод може бити нумерички нестабилан, што је илустровано у наредном примеру.

Пример 11.3. Решење линеарне једначине $y' = -2.3y$, $y(0) = 1$ је функција $y(x) = e^{-2.3x}$ која тежи 0 када $x \to \infty$. Ипак, применом Ојлеровог метода са кораком $h = 1$ нумеричко решење осцилује и расте (плава линија) - очигледно је погрешно. Са друге стране, за мањи корак $h = 0.5$ нумеричко решење осцилује ка нули (љубичаста линија). Резултати на интервалу $[0, 5]$ су приказани у наредној табели. Приметимо да вредности $y_5 = 3.71$ са кораком $h = 1$ и $y_{10} = 5.77 \cdot 10^{-9}$ са кораком $h = 0.5$ апроксимирају вредност $e^{-2.3 \cdot 5} \approx 1.01 \cdot 10^{-5}$. Иако добијена апроксимација у другом случају осцилује ка нули, чак и тада се она "солидно" разликује од тачног решења.



i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i $(h = 1)$	-1.3	1.69	-2.20	2.86	-3.71					
y_i $(h = 0.5)$	-0.15	$2.25 \cdot 10^{-2}$	$-3.38 \cdot 10^{-3}$	$5.06 \cdot 10^{-4}$	$-7.59 \cdot 10^{-5}$	$1.14 \cdot 10^{-5}$	$-1.71 \cdot 10^{-6}$	$2.56 \cdot 10^{-7}$	$-3.84 \cdot 10^{-8}$	$5.77 \cdot 10^{-9}$

Ако се примени Ојлеров метод на решавање диференцијалне једначине $y' = ky$, нумеричко решење је нестабилно ако је kh ван диска $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1| \leqslant 1\}$. То значи да нумеричко решење може доста да расте иако се то не дешава са тачним решењем (тзв. "stiff equations").

Ово ограничење, заједно са слабом конвергенцијом (глобална грешка је реда величине h) значи да се у пракси уместо најпростијег Ојлеровог метода често бирају други, сложенији методи са којима се постиже боља тачност (нпр. методи Рунге-Кута).

11.4 Модификације Ојлеровог метода

Најпростија модификација Ојлеровог метода је *имплицитан Ојлеров метод*

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}),$$

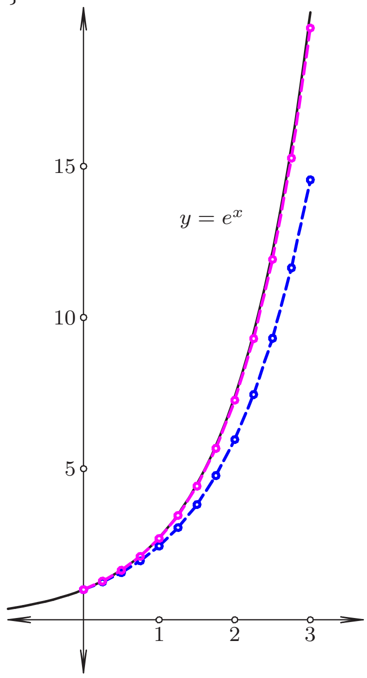
где се функција f уместо у полазној тачки (x_i, y_i) рачуна у крају посматраног подинтервала - тачки (x_{i+1}, y_{i+1}). Овај метод је имплицитан, јер се y_{i+1} појављује са обе стране једнакости, па у сваком кораку треба решити једначину по y_{i+1}, што захтева додатна израчунавања. Грешка имплицитног Ојлеровог метода је иста као код експлицитног, али је регион стабилности већи: за стабилност решења kh треба да буде у комплементу диска $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant 1\}$.

Један начин да се постигне већа тачност је да се укључи више израчунавања функције, нпр. *метод средње тачке* је

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right),$$

који, као и Ојлеров метод, припада фамилији Рунге-Кута метода. Метод средње тачке је метод другог реда, што значи да су локална и глобална грешка реда величине h^3 и h^2 редом.

Пример 11.4. Посматрајмо Кошијев проблем $y' = y$, $y(0) = 1$. Изаберимо корак $h = 0.25$ и нађимо приближне вредности $y(3)$ користећи Ојлеров метод (плава линија) и метод средње тачке (љубичаста линија) да бисмо показали да други метод даје тачнију апроксимацију. Тачна вредност решења $y = e^x$ за $x = 3$ је $e^3 \approx 20.02$, а приближне вредности $y(3)$ добијене Ојлервим методом и методом средње тачке (са кораком 0.25) су редом 14.55 и 19.57.



Класичан Рунге-Кута метод (или $RK4$ метод) се дефинише на следећи начин:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right),$$

при чему је

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) && \text{(нагиб на почетку интервала - као код Ојлеровог метода)},\\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) && \text{(нагиб на средини интервала користећи } k_1\text{)},\\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) && \text{(нагиб на средини интервала користећи } k_2\text{)},\\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3) && \text{(нагиб на крају интервала користећи } k_3\text{)}.
\end{aligned}$$

Коначно, нагиб $\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ који се користи у методи Рунге-Кута је тежинска просечна вредност ова четири нагиба, при чему већи утицај имају нагиби на средини интервала.

Ако у диференцијалној једначини $y' = f(x, y)$ функција f не зависи од y, тада се диференцијална једначина своди на интеграл, па је метод Рунге-Кута заправо Симпсоново правило.

Метод Рунге-Кута је метод четвртог реда, што значи да су локална и глобална грешка реда величине h^5 и h^4 редом.

Поменимо на крају да је други начин да се повећа тачност Ојлеровог метода је да се у кораку $i+1$ користе вредности $f(x_i, y_i)$ и $f(x_{i-1}, y_{i-1})$, као у *линеарним више-корачним методама.*