

10. Крива као траг векторске функције

Дефиниција 10.1. Векторска функција у простору \mathbb{R}^3 је функција облика

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),$$

где су $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ координате функције. Њен траг (или ходограф) је скуп свих крајева вектора $\vec{r}(t)$.

Извод функције $\vec{r}(t)$ по t је $\vec{r}'(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Слично се налазе други извод $\vec{r}''(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$ и трећи извод $\vec{r}'''(t) \equiv \dddot{\vec{r}}(t)$.

Важни су нам следећи јединични вектори у тачки $A = \vec{r}(t_0)$:

- вектор тангенте $\vec{\tau} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|}$,
- вектор бинормале $\vec{b} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$ и
- вектор нормале $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau}$.

Вектори $\vec{\tau}$, \vec{n} и \vec{b} не зависе од параметризације криве, већ само од њене оријентације. Такође, они чине ортонормирану базу простора \mathbb{R}^3 (вектори су јединични и ортогонални међу собом) и образују (покретни) природни триједар криве. Ова база зависи од тачке $A = \vec{r}(t_0)$ у којој се рачунају вектори.

Дакле, природни триједар чини тројка вектора $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ и његовим елементима сматрамо и три придружене равни:

- оскулаторну $(\perp \vec{b})$,
- нормалну $(\perp \vec{\tau})$ и
- ректификациону $(\perp \vec{n})$.

На крају су дате формуле за кривину K и торзију T криве $\vec{r}(t)$ у датој тачки $A = \vec{r}(t_0)$:

$$K = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}, \quad T = \frac{[\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}}]}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2}.$$

Полупречник кривине је $R_K = 1/K$, а полупречник торзије је $R_T = 1/T$. Вектори кривине и торзије су редом вектори $\vec{K} = K\vec{n}$ и $\vec{T} = -T\vec{b}$.

Кривина криве мери одступање криве од праве линије (тангенте), а торзија мери одступање криве од равanske криве (криве у оскулаторној равни). Следи да је крива раванска уколико је њена торзија нула, односно уколико је вектор бинормале константан у свакој тачки криве.

10.1. Задаци

1. Наћи елементе природног триедра у тачки $t = 0$ ходографа вектор функције $\vec{r}(t) = e^{-t}\vec{i} + e^{-t}\vec{j} + \sqrt{2}t\vec{k}$.

Налазимо $\dot{\vec{r}}(t) = (-e^{-t}, e^{-t}, \sqrt{2})$, $\ddot{\vec{r}}(t) = (e^{-t}, e^{-t}, 0)$, па је $\dot{\vec{r}}(0) = (-1, 1, \sqrt{2})$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (1, 1, 0)$ и $\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2)$. Дакле, $\vec{\tau} = \frac{1}{2}(-1, 1, \sqrt{2})$, $\vec{b} = \frac{1}{2}(-1, 1, -\sqrt{2})$ и $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\tau} = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$. Нормална π_{τ} , ректификациона π_n и оскулаторна раван π_b су нормалне на тангенту, нормалу и бинормалу, редом, и садрже тачку $(1, 1, \sqrt{2})$, па су њихове једначине $\pi_{\tau} : -x + y + \sqrt{2}z - 2 = 0$, $\pi_n : x + y - 2 = 0$, $\pi_b : -x + y - \sqrt{2}z + 2 = 0$.

2. Наћи тачку на кривој $\alpha(t) = \left(t, \frac{1+t}{t}, \frac{1-t^2}{t}\right)$ за $t > 0$ у којој је кривина екстремална.

Налазимо $\dot{\alpha}(t) = (1, -t^{-2}, -t^{-2} - 1)$, $\ddot{\alpha}(t) = 2t^{-3}(0, 1, 1)$ и $\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = 2t^{-3}(1, -1, 1)$. Даље је $|\dot{\alpha}(t)| = t^{-2}\sqrt{2(t^4 + t^2 + 1)}$ и $|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)| = 2\sqrt{3}|t^{-3}|$, па је

$$K = \frac{\sqrt{6}|t|^3}{2(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

Да бисмо нашли тачку у којој је кривина екстремална, нађимо њен први извод: за $t > 0$ је

$$K' = -\frac{3x^2(x^4 - 1)}{(t^4 + t^2 + 1)^{5/2}}$$

и максимум се ту постиже за $t = 1$, $K(1) = 1/(3\sqrt{2})$. Дакле, тражена тачка је $(1, 2, 0)$.

3. Проверити да ли је крива $\alpha(t) = (1 + \cos t, \sin t, 2 \sin \frac{t}{2})$ планарна.

Крива је планарна (лежи у равни) ако је њена торзија једнака нули у свакој тачки. Дакле, треба наћи

$$T = \frac{[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2}.$$

Налазимо

$$\dot{\alpha} = \left(-\sin t, \cos t, \cos \frac{t}{2}\right), \quad \ddot{\alpha} = \left(-\cos t, -\sin t, -\frac{1}{2}\sin \frac{t}{2}\right), \quad \ddot{\alpha} = \left(\sin t, -\cos t, -\frac{1}{4}\cos \frac{t}{2}\right),$$

$$\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha} = \left(-\frac{1}{2}\cos t \sin \frac{t}{2} + \sin t \cos \frac{t}{2}, -\frac{1}{2}\sin \frac{t}{2} \sin t - \cos \frac{t}{2} \cos t, 1\right),$$

$$|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}| = \frac{\sqrt{6\cos t + 26}}{4}, \quad (\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha} = \frac{3}{4}\cos \frac{t}{2}, \quad T = \frac{6\cos \frac{t}{2}}{3\cos t + 13}.$$

Како торзија није индентички једнака нули, крива није планарна.