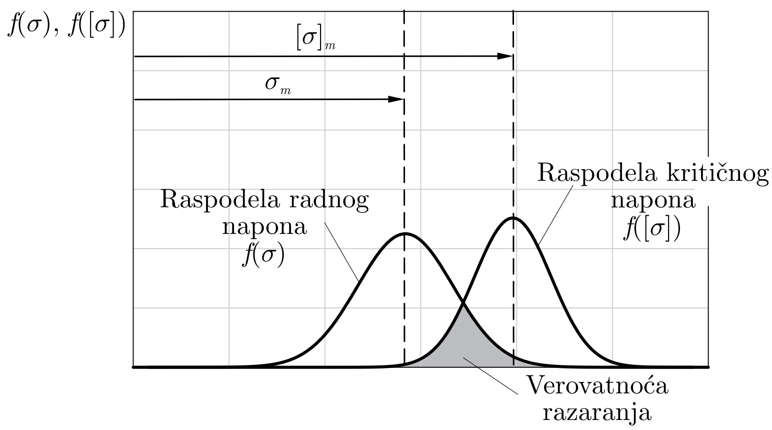
1. Analitičko određivanje pouzdanosti

Ako se kao kriterijum otkaza elementa, podsklopa ili sklopa mašinske konstrukcije usvoji lom odnosno razaranje, onda pouzdanost može da se odredi kao verovatnoća da će radni napon biti manji od kritičnog. Na osnovu ovog može da se zaključi, da proračun mašinskih konstrukcija sa aspekta pouzdanosti treba biti zasnovan na odgovarajućim upoređenjima raspodela kritičnih i radnih napona. Na osnovu poznavanja ovih raspodela omogućava se procenjivanje, tj. predviđanje pouzdanosti konstrukcija. Površina koja odgovara "*preklopu*" raspodele radnog i kritičnog napona, predstavlja verovatnoću da će radni napon biti veći od kritičnog, tj. verovatnoću pojave otkaza (razaranja), Slika 1.1.



Slika 1.1: Raspodela kritičnog i radnog napona; verovatnoća razaranja

Pouzdanost elemenata ili sistema određuje se iz osnovnog uslova da verovatnoća bezotkaznog rada postoji kada kritični napon (ili opterećenje) $[\sigma]$ nije premašeno radnim naponom σ, što znači da je osnovni uslov bezotkaznog rada:

$$[\sigma] > \sigma \tag{1.1}$$

Verovatnoća P da će se vrednost radnog napona σ naći unutar malog intervala $\mathrm{d}\sigma$ jednaka je elementarnoj površini A_1 ispod funkcije raspodele radnog napona (Slika 1.2), tj.:

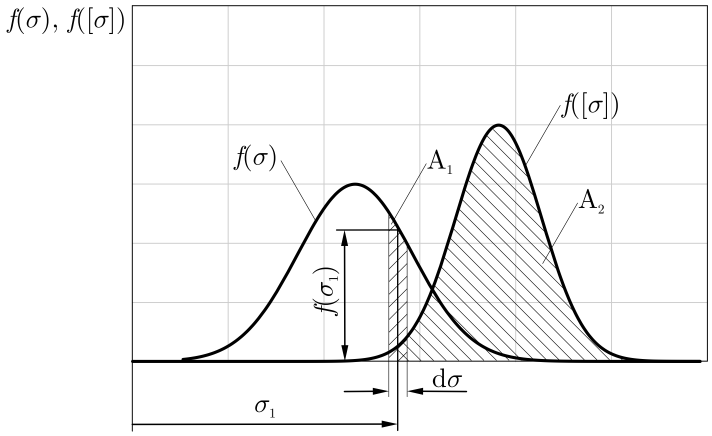
$$P\Big(\sigma_1 - \frac{\mathrm{d}\sigma}{2} \leq \sigma \leq \sigma_1 + \frac{\mathrm{d}\sigma}{2}\Big) = f(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma = \mathrm{A}_1. \tag{1.2}$$

Verovatnoća P da je kritični napon veći od radnog napona σ_1 jednaka je površini A_2:

$$P([\sigma] > \sigma_1) = \int\limits_{\sigma_1}^{\infty} f([\sigma])\mathrm{d}[\sigma] = \mathrm{A}_2 \tag{1.3}$$

Verovatnoća bezotkaznog rada (tj. pouzdanost) jednaka je proizvodu te dve verovatnoće:

$$\mathrm{d}R = f(\sigma_1)\mathrm{d}\sigma \int\limits_{\sigma_1}^{\infty} f([\sigma])\mathrm{d}[\sigma]. \tag{1.4}$$



Slika 1.2: Grafički prikaz raspodele radnog i kritičnog napona

Prema tome, pouzdanost nekog elementa jednaka je verovatnoći da je kritični napon veći od mogućih vrednosti radnog napona.

Opšta jednačina je:

$$R = \int \mathrm{d}R = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)\Big[\int_{\sigma}^{\infty} f([\sigma])\mathrm{d}[\sigma]\Big]\mathrm{d}\sigma. \tag{1.5}$$

1.1 Metoda parcijalnih izvoda

Ova metoda koristi se za određivanje vrednosti standardne devijacije međusobno zavisnih veličina. Neka je slučajna promenljiva veličina z funkcionalno vezana sa slučajnim promenljivim veličinama x i y koje pripadaju normalnoj raspodeli:

$$z = f(x, y). \tag{1.6}$$

Tada je srednja vrednost slučajne promenljive veličine z data jednačinom:

$$\overline{z} = f(\overline{x}, \overline{y}), \tag{1.7}$$

a njena standardna devijacija:

$$S_z = \sqrt{\Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 S_x^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2 S_y^2}, \tag{1.8}$$

pri čemu se parcijalni izvodi uzimaju za $x = \overline{x}$ i $y = \overline{y}$. U opštem slučaju ako je z funkcija n slučajnih promenljivih veličina $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$:

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.9}$$

tada je srednja vrednost $\overline{z}$ jednaka:

$$\overline{z} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n), \tag{1.10}$$

a standardna devijacija:

$$S_z = \sqrt{\Big(\frac{\partial z}{\partial x_1}\Big)^2 S_{x_1}^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x_2}\Big)^2 S_{x_2}^2 + \ldots + \Big(\frac{\partial z}{\partial x_n}\Big)^2 S_{x_n}^2}, \tag{1.11}$$

odnosno:

$$S_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2 S_{x_i}^2}, \tag{1.12}$$

pri čemu se parcijalni izvodi uzimaju za $x_i = \overline{x}_i$.

Ako je $z = x \pm y$, pri čemu su x i y statistički nezavisni, onda je srednja vrednost $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \overline{x} \pm \overline{y}. \tag{1.13}$$

Pošto je:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 1, \tag{1.14}$$

primenom jednačine (1.8) dobija se izraz za standardnu devijaciju S_z:

$$S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2}. \tag{1.15}$$

Ako je $z = x \cdot y$, pri čemu su x i y statistički nezavisni, dobija se da je srednja vrednost $\overline{z}$:

$$\overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{y}. \tag{1.16}$$

Kako je:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x, \tag{1.17}$$

primenom jednačine (1.8) dobija se izraz za standardnu devijaciju S_z:

$$S_z = \sqrt{\overline{y}^2 S_x^2 + \overline{x}^2 S_y^2}. \tag{1.18}$$

Ako je $z = \dfrac{x}{y}$, pri čemu su x i y statistički nezavisni, srednja vrednost $\overline{z}$ je:

$$\overline{z} = \frac{\overline{x}}{\overline{y}}. \tag{1.19}$$

Parcijalni izvodi veličine z po promenljivim x i y su:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \qquad \text{i} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \tag{1.20}$$

pa se primenom jednačine (1.8) dobija da je S_z:

$$S_z = \sqrt{\frac{1}{\overline{y}^2} S_x^2 + \left(-\frac{\overline{x}}{\overline{y}^2}\right)^2 S_y^2} = \sqrt{\frac{\overline{y}^2 S_x^2 + \overline{x}^2 S_y^2}{\overline{y}^4}}. \tag{1.21}$$

1.2 Određivanje pouzdanosti za normalnu raspodelu radnog i kritičnog napona

Tačno rešenje jednačine (1.5) postoji samo za neke raspodele radnog i kritičnog napona. Za ostale raspodele postoje približna rešenja koja se u praksi mogu koristiti. Često se može pretpostaviti da raspodelu radnog i kritičnog napona karakteriše normalni zakon raspodele. U tom slučaju, raspodela radnog napona može se napisati u sledećem obliku:

$$f(\sigma) = \frac{1}{S_\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma-\overline{\sigma}}{S_\sigma}\right)^2}, \tag{1.22}$$

a raspodela kritičnog napona:

$$f([\sigma]) = \frac{1}{S_{[\sigma]}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{[\sigma]-[\overline{\sigma}]}{S_{[\sigma]}}\right)^2}. \tag{1.23}$$

Pouzdanost je verovatnoća da je kritični napon veći od radnog napona:

$$[\sigma]-\sigma > 0 \tag{1.24}$$

Ako uvedemo oznaku:

$$\xi = [\sigma]-\sigma, \tag{1.25}$$

onda je pouzdanost verovatnoća da je $\xi > 0$. Funkcija gustine verovatnoće razlike ξ obeležava se sa $f(\xi)$ i naziva se raspodela razlike. Kako je pokazano u prethodnom poglavlju, ako su funkcije $f(\sigma)$ i $f([\sigma])$ normalne, onda je i $f(\xi)$ normalna raspodela i jednaka je:

$$f(\xi) = \frac{1}{S_\xi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\overline{\xi}}{S_\xi}\right)^2}, \tag{1.26}$$

gde je srednja vrednost razlike:

$$\overline{\xi} = [\overline{\sigma}]-\overline{\sigma}, \tag{1.27}$$

a standardna devijacija razlike:

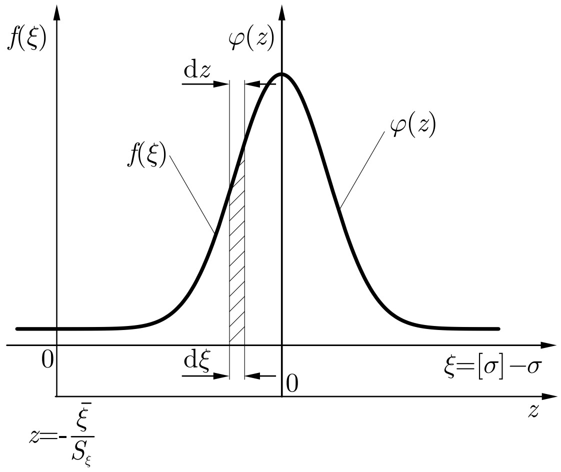
$$S_\xi = \sqrt{S_{[\sigma]}^2 - S_\sigma^2}. \tag{1.28}$$

Sada se pouzdanost može dobiti na sledeći način (vidi Sliku 1.3):

$$R = P(\xi > 0) = \int_0^\infty f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{S_\xi\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\overline{\xi}}{S_\xi}\right)^2} \mathrm{d}\xi. \tag{1.29}$$

Da bismo izračunali vrednost integrala u jednačini (1.29) koristićemo standardizovanu normalnu raspodelu. Stoga se uvodi standardizovana slučajna promenjiva z:

$$z = \frac{\xi-\overline{\xi}}{S_\xi}. \tag{1.30}$$



Slika 1.3

Sada se menjaju i granice integrala u jednačini (1.29) i to:

- za $\xi = 0$ dobija se $z = \dfrac{0-\bar{\xi}}{S_\xi} = -\dfrac{\bar{\xi}}{S_\xi} = -\dfrac{[\overline{\sigma}]-\overline{\sigma}}{\sqrt{S^2_{[\sigma]} - S^2_{\sigma}}}$,
- za $\xi = \infty$ dobija se $z = \dfrac{\infty-\bar{\xi}}{S_\xi} = \infty$,
- za $z = 0$ dobija se $\rightarrow \xi = \bar{\xi}$.

Iz uslova jednakosti površina verovatnoće $f(\xi)\mathrm{d}\xi = \varphi(z)\mathrm{d}z$ sledi:

$$\varphi(z) = \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}z}. \tag{1.31}$$

Diferenciranjem uvedene smene $z = \dfrac{\xi-\bar{\xi}}{S_\xi}$ sledi da je:

$$\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}\xi}{S_\xi}. \tag{1.32}$$

Na osnovu (1.31) i (1.32) sledi:

$$\varphi(z) = f(\xi)\cdot S_\xi. \tag{1.33}$$

Smenom (1.30) i (1.33) u (1.29) sledi izraz za funkciju gustine raspodele $\varphi(z)$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}z^2}, \tag{1.34}$$

a smenom (1.34) u (1.29) sledi tražena verovatnoća:

$$R = P(\xi > 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot \int\limits_{z=-\frac{\bar{\xi}}{S_\xi}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z. \tag{1.35}$$

Vrednosti integrala date su u tablicama u funkciji promenjive z.

Korišćena literatura

1. Vujanović N. (1990) **Teorija pouzdanosti tehničkih sistema**, Vojnoizdavački i novinski centar;
2. Ristivojević M. (2022) **Pouzdanost konstrukcija**, izvodi sa predavanja;
3. Ognjanović M. (2007) **Razvoj i dizajn mašina**, Mašinski fakultet Beograd;
4. Ivanović G. (1987) **Pouzdanost tehničkih sistema – zbirka rešenih zadataka**, Mašinski fakultet Beograd;
5. Ramović R. (2005) **Pouzdanost sistema – elektronskih, telekomunikacionih i informacionih**, Elektrotehnički fakultet Beograd;
6. Milčić D. (2005) **Pouzdanost mašinskih sistema**, Mašinski fakultet Niš;
7. Bertsche B. (2008) **Reliability in Automotive and Mečanical Engineering**, Inst. Maschinenelemente Universitat Stuttgart;
8. Kecicoglu D. (2003) **Robust Engineering: Design-By-Reliability**, Department of Aerospace and Mechanical Engineering The University of Arizona;