Нумеричко решавање линеарних система једначина

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n$$

$\xrightarrow{\text{скраћено}} A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$

b - улазни подаци

x - излазни подаци

Норме вектора и матрица

1° униформна норма вектора $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \rightarrow \|\vec{x}\|_\infty \overset{def}{=} \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

2° апсолутна норма вектора $\vec{x} \longrightarrow \|\vec{x}\|_1 \overset{def}{=} |x_1| + \ldots + |x_n|$

3° униформна норма матрице $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{bmatrix} \rightarrow \|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

сума апс. вредности из j-те колоне, а бирамо ону j колону чија је сума највећа

4° апсолутна норма матрице A

$\|A\|_1 = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| \rightarrow$ гледамо у свим врстама збир апсолутних вредности, па бирамо највећу вредност

5° еуклидска норма вектора $\vec{x} \Rightarrow \|\vec{x}_2\| \overset{def}{=} \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$

6° еуклидска норма матрице $A \Rightarrow \|A\|_2 \overset{def}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$

У свакој норми за било које матрице P и Q важи неједнакост $\|P\| \cdot \|Q\| \ge \|P \cdot Q\| \rightarrow$ Коши-~~Шварцланова~~ Шварцова неједнакост

Нумеричко решавање система $\vec{A} \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$ а по правилу заснива на презаписивању истог у форми $\vec{x}^T = B \cdot \vec{x}^T + \vec{c}^T$ за неку матрицу B и вектор $\vec{c}$ и онда на бази тога развијамо нумеричку методу $\vec{x}_{k+1} = B \cdot \vec{x}_k + \vec{c}^T$. Довољан (а није чак ни неопходан) услов за конвергенцију овакве методе је да буде $\|B\| < 1$ у бар једној норми

$$(M+K)\vec{x}^T = \vec{b}^T$$

$$M^{-1}\cdot / \ M\vec{x}^T = \vec{b}^T - K\cdot\vec{x}^T$$

(detM≠0) $$\vec{x}^T = \underbrace{M^{-1}\cdot\vec{b}^T}_{\vec{c}^T} + \underbrace{(-M^{-1}\cdot K)}_{B}\,\vec{x}^T$$

$\|-M^{-1}\cdot K\| \le \|M^{-1}\|\cdot\|K\| \Rightarrow$ одговара нам да M^{-1} има што мању норму

- пожељно је да се M^{-1} лако рачуна - у те сврхе је најбоље да M буде дијагонална

$A = M+K$

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

- наравно, под претпоставком да је $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn} \neq 0$

- случај 3 променљиве

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \\ x_3^{(k+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 \end{bmatrix}}_{B} \cdot \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \frac{b_3}{a_{33}} \end{bmatrix}$$

један од довољних услова за конвергенцију је $\|B\|_1 < 1$

(збир апсолутних вредности у свакој врсти мањи од 1)

$\hookrightarrow$ Јакобијева метода

- дијагонално доминантне:
$$|a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|$$
$$|a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|$$
$$|a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}|$$

- у пракси се користи Гаус - Зајделова метода

Итеративне методе за проналажење нула функције

Теорема 1

Ако је ф-ја $f(x)$ непрекидна на $[a,b]$ и ако је $f(a)\cdot f(b)<0$ онда на интервалу $[a,b]$ постоји бар једна реална нула

Теорема 2

Ако је у задатом интервалу ф-ја монотона онда постоји јединствена нула

метода итерације $x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$ $\quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \alpha$ ↳ приближна нула

$$|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon$$

Метода просте итерације конвергира када $|F'(\alpha)| < 1$

$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \quad |f(x^{(k)})| < \varepsilon_f$ ↳ унапред задато

⊛ Њутнова метода тангенте

$f(a)\cdot f(b) < 0 \rightarrow$ лоцирамо интервал

1° $f'(x)$ и $f''(x)$ не мењају знак тј. $f'(x) \neq 0$ на $[a,b]$

2° $f(x_0)\cdot f''(x_0) > 0$

Када завршавамо са израчунавањима

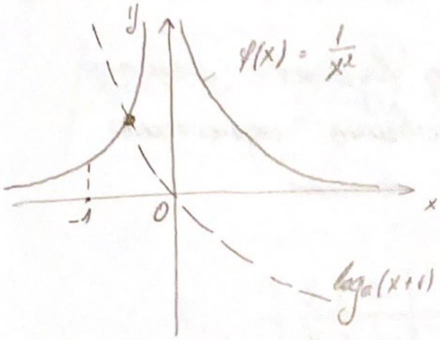
Њутнова: $|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}}$ $\quad m_1 = \min|f'(x)|$, $M_2 = \max|f''(x)|$

проста: $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}} < \varepsilon$ за процену потребног броја итерација

Пример 1.

Методом половљења решити једначину $x^2 \cdot \log_{0.5}(x+1) = 1$ са тачношћу $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$

$\log_{0.5}(x+1) = \frac{1}{x^2}$ → у пресеку је нула ф-је



$f(-1)$ и $f(-0.5)$

$f(-0.8)>0 \quad f(-0.6)<0$

⇓

нула $x^* \in (-0.8, -0.6)$

$$\left.\frac{1}{2^{k+1}}\left|-0.6-(-0.8)\right| \le \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2} \right\} \Rightarrow k \ge 5$$

↳ толико пута половимо интервал

k	a_k	b_k	$x_k = \frac{1}{2}(a_k+b_k)$	знак $f(x_k)$
0	-0.8	-0.6	$x_k = -0.7$	−
1	-0.8	-0.7	$x_k = -0.75$	+
2	-0.75	-0.7	$x_k = -0.725$	+
3	-0.75	-0.725	$x_k = -0.7375$	+
4	-0.7375	-0.725	$x_k = -0.73125$	

$x^* \in (-0.8, -0.7)$

$x^* \in (-0.75, -0.7)$

$x^* \in (-0.75, -0.725)$

$x^* \in (-0.7375, -0.725)$

$\Rightarrow \boxed{x_k = -0.73125}$

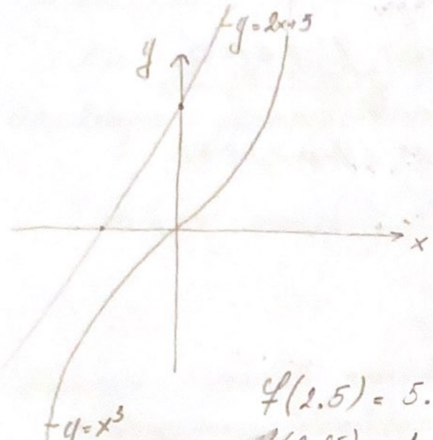
Пример 2

Њутновом методом са тачношћу $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ решити једначину $f(x) = x^3 - 2x - 5$

Њутнова: $\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$ → метода тангенте

$x^3 = 2x + 5$ → пресек

$f(x) = 0$ → код Њутнове методе решавамо једначине овог облика



x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$					-1	16

$x^* \in (2, 3)$

$f(2.5) = 5.625 \Rightarrow x^* \in (2, 2.5)$

$f(2.25) = 1.8906 \Rightarrow x^* \in (2, 2.25)$

$f(2.125) = 0.3457 \Rightarrow x^* \in (2, 2.125)$

$f(2.0625) = -0.3513 \Rightarrow x^* \in (2.0625, 2.125)$

$f'(x) = 3x^2 - 2$ $\quad f''(x) = 6x$

$f''(x) > 0$ за $\forall x \in (2.0625, 2.125)$

$3x^2 - 2 > 0$

$x^2 > \frac{2}{3} \Rightarrow \forall x \in (2.0625, 2.125)$ је $f'(x) > 0$

$x_0 : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 = 2.125$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$h = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	2.100	0.06100	11.2300	-0.00543
1	2.09457	0.00021	11.16167	-0.00002
2	2.09455	0.00002	11.16142	0.00000
3	2.09455			

$\Rightarrow x^* = x_3 = 2.0946$

или идемо док није

$|x_n - x_{n-1}| < \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M}}$

Њутнова метода тангенте

$f(x)=0$

1) наћи $[a,b]$ $\quad f(a)\cdot f(b)<0$
2) $f'(x)\neq 0, \quad \forall x\in(a,b)$ и $f'(x)$ и $f''(x)$ су сталног знака
3) $x_0: \quad f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$

$$\boxed{x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

заустављамо се када:

$$|x_n-x_{n-1}|\leq\sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}}$$

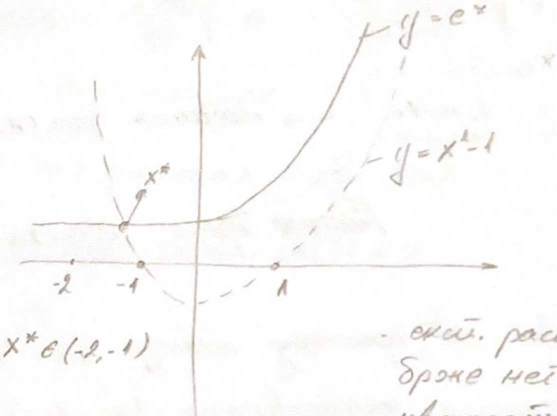
$m_1=\min|f'(x)|$ на (a,b)

$M_2=\max|f''(x)|$ на (a,b)

Пример 1.

$f(x)=x^2-1-e^x, \quad \varepsilon=10^{-5}$

$f(x)=0 \Rightarrow \underbrace{x^2-1-e^x=0}_{x^2-1=e^x}$



$f(-2)=(-2)^2-1-e^{-2}=2.865>0$

$f(-1)=(-1)^2-1-e^{-1}=-0.368<0$ $\quad \Big\}\ x^*\in(-2,-1)$

експ. расте брже него квадратно

сужавамо интервал:

$f(-1.5)=(-1.5)^2-1-e^{-1.5}=1.0269>0 \Rightarrow x^*\in(-1.5,-1)$

$f(-1.25)=0.2760>0 \Rightarrow x^*\in(-1.25,-1)$

$f(-1.125)=-0.0590<0 \Rightarrow x^*\in(\underset{a}{-1.25},\underset{b}{-1.125})$

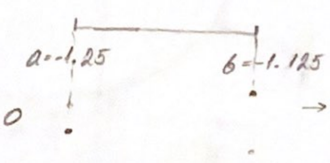
1° a b : $f(a)\cdot f(b)<0$

2° $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in(-1.25,-1.125) \land f'(x)$ и $f''(x)$ сталног знака

$f'(x)=2x-e^x \qquad f'(-1.125)=-2.5747<0$

$\underbrace{f''(x)=2-e^x} \qquad f'(-1.25)=-2.7865<0$

је на интервалу $(-1.25,-1.125)$ је увек >0



→ на овом интервалу не сече x-осу

3° $x_0 : f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$x_0 = -1.25 \rightarrow$ јер је $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$

$$x_1 = -1.25 - \frac{f(-1.25)}{f'(-1.25)} \quad \dots \quad |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2m_1 \varepsilon}{M_2}}$$

$$M_2 = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| = 2 - e^x, \quad -1.25 \leq x \leq -1.125$$

$$M_2 = 2 - e^{-1.25} = 1.7135$$

$m_1 = \min\limits_{x \in (-1.25, -1.125)} |f'(x)| = 2x - e^x \rightarrow$ знамо да је растућа

АПСОЛУТНА! $\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

$$\Rightarrow m_1 = 2 \cdot (-1.125) - e^{-1.125} = |-2.5747|$$

$$\sqrt{\frac{2m_1 \varepsilon}{M_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.5747 \cdot 10^{-5}}{1.7135}} \Rightarrow \sqrt{\frac{2m_1 \varepsilon}{M_2}} = 0.005482$$

води рачуна о децималама и тачности

$\boxed{x^* = -1.14776} \longrightarrow$ коначно решење

Метода просте итерације

- услови за примену методе: $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ на $[a,b]$
- критеријум заустављања $|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon$

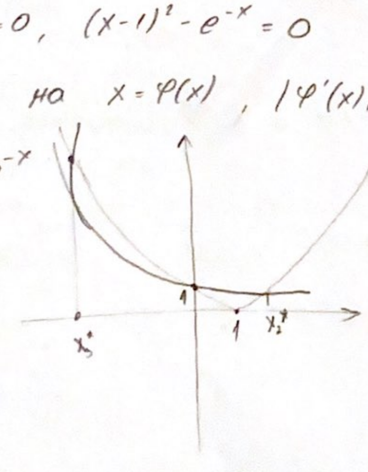
Пример 1.

Решити ј-ну: $(x-1)^2 - e^{-x} = 0$ са тачношћу $\varepsilon = 10^{-4}$

$f(x) = 0, \quad (x-1)^2 - e^{-x} = 0$

преводимо на $x = \varphi(x)$, $|\varphi'(x)| < 1$

$(x-1)^2 = e^{-x}$



$x_1^* = 0 \rightarrow$ види се са графика

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= (1-1)^2 - e^{-1} < 0 \\ \varphi(2) &= (2-1)^2 - e^{-2} > 0 \end{aligned}\right\} x_2^* \in (1, 2)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(-1) &= +1.2817 \\ \varphi(-2) &= 1.6109 \\ \varphi(-3) &= -4.0855 \end{aligned}\right\} x_3^* \in (-3, -2)$$

$\varphi(-4)$

б) тражимо нулу $x_2^* \in (1,2)$ методом просте итерације

$(x-1)^2 - e^{-x} = 0 \rightarrow$ трансформисати у $x = \varphi(x)$

$(x-1)^2 = e^{-x} \; / \ln$

$-x = \ln(x-1)^2 \Rightarrow x = -\ln(x-1)^2 = \varphi(x)$

провера услова: $|\varphi'(x)| < 1$ на $(1,2)$

$\varphi'(x)_{1,2}$: $\varphi'(x) = (-2\ln(x-1))' = -\frac{2}{x-1}$

$x = 1.5 \Rightarrow |\varphi'(x)| = 4 \rightarrow$ није испуњен

враћамо се на: $(x-1)^2 - e^{-x} = 0$ и тражимо нову $\varphi(x)$

$\Rightarrow |x-1| = e^{-x/2}$, $x \in (1,2)$ где важи $|x-1| \geq 0$

$x = 1 + e^{-x/2} \Rightarrow \varphi(x) = 1 + e^{-x/2}$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{2} e^{-x/2}$

провера услова: $|\varphi'(x)| < 1$

$|\varphi'(x)| = \frac{1}{2} e^{-x/2} \leq \frac{1}{2} e^{-1/2} < 0.3033 < 1$

$\Rightarrow$ услов за примену методе задовољен

$\frac{1-q}{q} \cdot \varepsilon = \frac{1-0.3033}{0.3033} \cdot 10^{-4} = 2.2974 \cdot 10^{-4}$

$x_n = \varphi(x_{n-1}) = 1 + e^{-x_{n-1}/2}$

$x_0 \in [1,2] \rightarrow$ било која тачка нпр $x_0 = 1$

$x_1 = 1 + e^{-1/2} = 1.60653$

$x_2 = 1 + e^{-1.60653/2} = 1.447826$

i	x_i	$x_i - x_{i-1}$
0	1	—
1	1.60653	0.60653
2	1.44786	0.15867
3	1.48484	0.3698
4	1.47596	0.00888
5	1.47808	0.00212
6	1.47757	0.00051
7	1.47769	0.000012

$\Rightarrow x_2^* = 1.4777$

③ Да би имали што мање итерација треба сузити што је више могуће интервал методом половљења

Стабилност линеарног система

Пон, 21.12.2020.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$A \cdot \vec{x}^T = \vec{b}^T$

A - матрица система

$\vec{b} = [b_1, \dots, b_n]$

$\vec{x} = [x_1, \dots, x_n]$

Шта се деси ако се десна страна „незнатно" измени и постане $\vec{b}' = \vec{b} + \Delta\vec{b}$ односно $[b_1' \dots b_n'] = [b_1 \dots b_n] + [\Delta b_1 \dots \Delta b_n]$

- Измени се и решење $\rightarrow$ није више $\vec{x}$ него је $\vec{x}' = \vec{x} + \Delta\vec{x}$

Може се рећи да је апсолутна грешка која се прави „на улазу" при уносу података $b_1, \dots, b_n$ једнака $\|\Delta\vec{b}\|$ а релативна грешка $\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$;

На излазу се притом прави апсолутна грешка $\|\Delta\vec{x}\|$, а релативна $\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$ (која год норма да је у питању, једино је битно држати се исте норме све време)

Ако је $\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}$ сразмерно $\frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$ у смислу да прати њен ред величине, кажемо да је дати систем СТАБИЛАН.

Што је $\frac{\|\Delta\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} : \frac{\|\Delta\vec{b}\|}{\|\vec{b}\|}$ већи то је систем нестабилнији $\rightarrow$ циљ је ограничити одозго овај однос

$$\left.\begin{aligned} A\vec{x}^T &= \vec{b}^T \\ A \cdot (\vec{x}^T + \Delta\vec{x}^T) &= \vec{b}^T + \Delta\vec{b}^T \end{aligned}\right\} A \cdot \Delta\vec{x} = \Delta\vec{b}^T$$

$\downarrow$ тражимо од чега је $\|\Delta\vec{x}\|$ мање и од чега је $\|\vec{x}\|$ веће, да би било ограничено

Основна својства норми: $\|P\| \cdot \|Q\| \geq \|P \cdot Q\|$

$$\|\vec{b}^T\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}^T\| \Rightarrow \|\vec{x}^T\| \geq \frac{\|\vec{b}^T\|}{\|A\|}$$

$$A \cdot \Delta\vec{x}^T = \Delta\vec{b}^T \Rightarrow \Delta\vec{x}^T = A^{-1}\Delta\vec{b}^T \Rightarrow \|\Delta\vec{x}^T\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta\vec{b}^T\|$$

$$\frac{\|\Delta \vec{x}^T\|}{\|\vec{x}^T\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|\Delta \vec{b}\|}{\frac{\|\vec{b}^T\|}{\|A\|}} = \frac{\|\Delta \vec{b}^T\|}{\|\vec{b}^T\|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

$$\boxed{\frac{\|\Delta \vec{x}^T\|}{\|\vec{x}^T\|} : \frac{\|\Delta \vec{b}^T\|}{\|\vec{b}^T\|} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$

→ фактор условљености

cond(A) → условљеност матрице A

кондициони број матрице A

Подразумева се да је систем такав да има јединствено решење ($\det A \neq 0$, дакле A^{-1} постоји)

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = \|E\| = 1$$

↳ свакако је веће од 1, али циљ је да буде што ближе 1

Пример лоше условљене матрице:

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & & \cdots & \frac{1}{2n} \end{matrix}$$

→ нагло опадају апсолутне вредности коефицијената у свим правцима

Пример 1

$$4.1x_1 + 2.8x_2 = 4.1$$
$$9.7x_1 + 6.6x_2 = 9.7$$

је систем са очигледним решењем $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, док систем

$$4.1x_1 + 2.8x_2 = 4.1$$
$$9.7x_1 + 6.6x_2 = 9.71$$

има решење $x_1' = 0.36$, $x_2' = 0.97$

$\vec{\Delta b} = [0\ 0.01]$ узрокује $\vec{\Delta x} = [-0.64\ \ 0.97]$

$$\frac{\|\Delta \vec{b}^T\|}{\|\vec{b}^T\|} = \frac{0.01}{9.7} \approx 10^{-3} \quad \frac{\|\Delta \vec{x}^T\|}{\|\vec{x}^T\|} = \frac{0.97}{1} = 0.97 \approx 1$$

$\frac{\|\Delta \vec{x}^T\|}{\|\vec{x}^T\|} : \frac{\|\Delta \vec{b}^T\|}{\|\vec{b}^T\|}$ још мало па 1000. Иначе за cond(A) се добије 16...

$\vec{X}^{k+1} = B \cdot \vec{X}^{k} + \vec{C}$ → линеарни итеративни процес

$B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.05 \\ 0.05 & 0.5 \end{bmatrix}$ $\vec{C} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$

(*) Питање на усменом: спектрални радијус, конвергенција линеарног итеративног процеса, поступак бр. 1 (Стилцер...) (Гаус-Зајделова техника)

Под претпоставком да почетна вредност $\vec{X}^0$ нема значајних цифара, проценити број итерација да би се решење добило на 2 значајне цифре

$$\begin{bmatrix} X_1^{(k+1)} \\ X_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.05 \\ 0.05 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^{(k)} \\ X_2^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

$$X_1^{(k+1)} = 0.5\, X_1^{(k)} + 0.05\, X_2^{(k)} + 1.0$$

$$X_2^{(k+1)} = 0.05\, X_1^{(k)} + 0.5\, X_2^{(k)} + 1.0$$

Алгоритам има за циљ да исконвергира ка решењу $\vec{X}$ тог неког система у сврху чијег решавања је направљен – то решење свакако испуњава $\vec{X} = B\vec{X} + \vec{C}$

$$\vec{X}^{k+1} = B\vec{X}^{k} + \vec{C}$$

$$\vec{X}^{k+1} - \vec{X} = B(\vec{X}^{k} - \vec{X})$$ → занима нас колико смо далеко од тачног решења

$$\|\vec{X}^{k+1} - \vec{X}\| = \|B(\vec{X}^{k} - \vec{X})\| \le \|B\| \cdot \|\vec{X}^{k} - \vec{X}\| \le \|B\| \cdot \|B\| \cdot \|\vec{X}^{k-1} - \vec{X}\|$$

$$\Rightarrow \|\vec{X}^{k+1} - \vec{X}\| \le \|B\|^{k+1} \cdot \|\vec{X}^0 - \vec{X}\|$$

· број значајних цифара ≈ негативан логаритам релативне грешке !!!

$$\underbrace{\frac{\|\vec{X}^{k+1} - \vec{X}\|}{\|\vec{X}\|}}_{\delta_{k+1}} \le \|B\|^{k+1} \cdot \frac{\|\vec{X}^0 - \vec{X}\|}{\|\vec{X}\|} = \delta_0$$

Z - број значајних цифара

$$-Z_{k+1} \approx \log_{10}\delta_{k+1} \le (k+1)\log_{10}\|B\| + \log_{10}\delta_0 \approx -Z_0$$

$$Z_{k+1} \ge -(k+1)\log_{10}\|B\| + Z_0$$

Ако хоћемо да $Z_{k+1} \ge 2$ мора да је $(k+1)(-\log_{10} 0.3) \ge 2 \Rightarrow k = 7.8$

$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}\| \leq \|B\| \cdot \|\vec{x}_k - \vec{x}\|$

↳ битно је пратити одступање у свакој итерацији

јако битна карактеристика сваке нумеричке методе је њен ред (брзина) конвергенције и то је такав број $r \in \mathbb{R}$ за који постоји константа C таква да је

$\|x_{k+1} - x\| \leq C \cdot \|\vec{x}_k - \vec{x}\|^r$, што је r веће то је боље

- Њутнова метода тангенте има $r = 2$

Системи нелинеарних једначина

Пон, 14. 12. 2020.

$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

$\vdots$

$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

$\vec{f}(\vec{x}) = 0$, где је $\vec{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} - \overbrace{W_{\vec{f}}^{(-1)}}^{\text{инверзна матрица}}(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \cdot \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ f_n(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \end{bmatrix}$$

$$W_{\vec{f}}(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Вронскијан}$$

Да би метода могла да се примени на овакав начин потребно је да у околини решења $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ које тражимо буде $\det W_{\vec{f}} \neq 0$ (по могућству што даље од нуле)

Пример 1.

$$y(x-1) = 1 \qquad \qquad x \leftrightarrow x_1$$
$$x^2 = y^2+1 \quad \longrightarrow \quad y \leftrightarrow x_2$$

$$x_2(x_1-1) - 1 = 0 \;\rightarrow\; \varphi_1(x_1,x_2) = x_2x_1 - x_2 - 1$$
$$x_1^2 - x_2^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; \varphi_2(x_1,x_2) = x_1^2 - x_2^2 - 1$$

$$W_{\vec{\varphi}}(x_1 x_2) = \begin{bmatrix} x_2 & x_1-1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

→ проверити да ли је $A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ → подсетник

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{-2x_1^{(k)2} - 2x_2^{(k)2} + 2x_1^{(k)}}\begin{bmatrix} -2x_2^{(k)} & -x_1^{(k)}+1 \\ -2x_1^{(k)} & x_2^{(k)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2^{(k)}x_1^{(k)} - x_2^{(k)} - 1 \\ x_1^{(k)2} - x_2^{(k)2} - 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \frac{1}{x-1} = f(x)\;;\; y = \pm\sqrt{x^2-1} = g(x)$$