Prvi zadatak sa Trećeg kolokvijuma za studente 1. i 2. smene (A. Pejčev/D. Djukić)

Brzinsko polje nestišljivog fluida je $\vec{A} = (x+y)(x+z)\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$. Naći protok ovog fluida kroz unutrašnju stranu dela sfere $x^2+y^2+z^2=4x$ ispod ravni $z=1$.

Rešenje zadatka

Imamo $\vec{A}=(P,Q,R)$ za $P=Q=R=(x+y)(x+z)=x^2+xy+xz+yz$ i $div\vec{A} = (2x+y+z)+(x+z)+(x+y)=4x+2y+2z$.

Datu površ S zatvoricémo diskom $D:((x-2)^2+y^2\leqslant 3, z=1)$. Disk D se parametrizuje kao $x=2+r\cos(t)$, $y=r\sin(t)$, $z=1$ ($r\leqslant\sqrt{3}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$).

Protok vektorskog polja $\vec{A}$ kroz gornju stranu diska D je

$I_1=\iint_D(x^2+xy+x+y)dxdy=\int_0^{\sqrt{3}}dr=\int_0^{2\pi}(4+r^2cos^2(t)+2)r\,dt = pi\int_0^{\sqrt{3}}(12r+r^3)dr = \frac{81}{4}\pi$.

S druge strane, protok I_0 kroz spoljnu stranu površi $S\cup D$ ćemo izračunati primenom teoreme Gaus-Ostrogradskog. Unutrašnjost V ove površi se parametrizuje kao $x=2+r\sin t\cos u$, $y=r\sin t\sin u$, $z=r\cos t$, uz uslove $0\leqslant r\leqslant 2$, $0\leqslant t\leqslant\pi$, $0\leqslant u\leqslant 2\pi$ i $r\cos t\leqslant 1$. Ovaj uslov nije baš prijatan, obratiti pažnju na to kako integral moramo da delimo na dva dela: r treba istovremeno da bude manje ili jednako $1/\cos t$ i 2, što znači da tamo gde je $1/\cos t\leqslant 2$ (odnosno $\cos t\geq 0.5$, $t\leqslant\pi/3$) r ide od 0 do $1/\cos t$, dok tamo gde je $1/\cos t\geq 2$ (tj. $t\in(\pi/3,\pi)$) r ide od 0 do 2. Sledi da je

$$\begin{aligned}
I_0 =& \iiint_V(4x+2y+2z)dxdydz=\iiint(8+4r\sin t\cos u+2r\sin t\sin u+2r\cos t)dxdydz\\
=& 4\pi\iint_{r\cos t\leqslant 1}(4r^2\sin t+r^3\sin t\cos t)drdt\\
=& 4\pi\int_{\pi/3}^{\pi}dt\int_0^2(4r^2\sin t+r^3\sin t\cos t)dr+4\pi\int_0^{\pi/3}dt\int_0^{1/\cos t}(4r^2\sin t+r^3\sin t\cos t)dr\\
=& 4\pi\int_{\pi/3}^{\pi}(\tfrac{32}{3}\sin t+2\sin 2t)dt+\tfrac{19}{3}\pi\int_0^{\pi/3}\tfrac{\sin t}{\cos^3 t}dt\\
=& \tfrac{135}{2}\pi
\end{aligned}$$

Sledi da je protok kroz unutrašnju stranu površi S jednak $-(I_0-I_1)=-\frac{189}{4}\pi$.