Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Математика 3 - јануарски рок

15.1.2024. – група А

Душан Ђукић

1[15]. Наћи опште решење једначине $2y = (x^2+1)y'' + x$. Једно хомогено решење је квадратни полином.

2[15]. Одредити функције $x(t)$ и $y(t)$ које задовољавају услове $x(0) = y(0) = 1$ и $\begin{cases} x' = 3x - 6y + t \\ y' = 4x - 8y + t \end{cases}$.

3[15]. Крива γ је дата једначином $xy = 1$ за $1 \leqslant x \leqslant 2$. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_\gamma x^5\, ds$.

4[15]. Област D је део диска $x^2 + y^2 \leqslant 1$ изнад x-осе. Израчунати $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{2 + x^2 + y^2}$.

5[15]. Израчунати проток векторског поља $(1, x, y)$ кроз горњу страну површи $z = xy$ у области $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

6[25]. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\, dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin(xy)\, dy$.

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Математика 3 - јануарски рок

15.1.2024. – група Б

Душан Ђукић

1[15]. Наћи опште решење једначине $(x^2+4)y'' = 2y + x$. Једно хомогено решење је квадратни полином.

2[15]. Одредити функције $x(t)$ и $y(t)$ које задовољавају услове $x(0) = y(0) = 1$ и $\begin{cases} x' = 8x - 4y - t \\ y' = 6x - 3y - t \end{cases}$.

3[15]. Крива γ је дата једначином $yx = 1$ за $1 \leqslant y \leqslant 2$. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_\gamma y^5\, ds$.

4[15]. Област D је део диска $x^2 + y^2 \leqslant 1$ изнад x-осе. Израчунати $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{2 - x^2 - y^2}$.

5[15]. Израчунати проток векторског поља $(y, 1, x)$ кроз горњу страну површи $z = xy$ у области $0 \leqslant x, y \leqslant 1$.

6[25]. Израчунати интеграл $\displaystyle\int_0^\infty \sin x\, dx \int_0^\infty e^{-xy} \sin(xy)\, dy$.

Кратка решења

не тврдим да су безгрешна

1. *Група А.* Партикуларно решење је видљиво, $y_P = x$, а једно хомогено решење је управо $y_1 = x^2+1$, те опште решење налазимо применом "Лиувилове" формуле: $y_H = y_1\big(C_1 + C_2 \int e^{-\int p\,dx}/y_1^2\, dx\big)$, а срећом је $p = 0$. Добијамо $y_H = (x^2+1)\big(C_1 + C_2\int dx/(x^2+1)^2\big) \overset{x=\operatorname{tg} t}{=} (x^2+1)\big(C_1 + C_2 \int \cos^2 t\, dt\big) = (x^2+1)\big(C_1 + C_2 \frac{2t+\sin 2t}{4}\big) = (x^2+1)\big(C_1 + C_3(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{x^2+1})\big) = C_1(x^2+1) + C_3(x + (x^2+1)\operatorname{arctg} x)$, где је $C_3 = \frac{1}{2}C_2$.

   Група Б. Опет је $y_P = x$, а $y_H = C_1(x^2+4) + C_2(x + \frac{x^2+4}{2}\operatorname{arctg} x)$.

2. *Група Б.* Диференцирање даје $x'' = 8x' - 4y' - 1 = 40x - 20y - 4t - 1 = 5x' + t - 1$, па је $x'' - 5x' = t - 1$. Лако налазимо $x = Ae^{5t} + B + \frac{8t - 5t^2}{50}$ и $y = \frac{3}{4}Ae^{5t} + 2B + \frac{37t - 20t^2 - 4}{100}$. Почетни услови дају $A = \frac{96}{125}$ и $B = \frac{29}{125}$.

   Група А. Истим редоследом, сада ћемо добити $x'' = 3x' - 6y' + 1 = -15x + 30y - 3t + 1 = -5x' + 2t + 1$, па је $x = Ae^{-5t} + B + \frac{5t^2+3t}{25}$ и одатле $y = \frac{3x - x' + t}{6} = \frac{4}{3}Ae^{-5t} + \frac{1}{2}B + \frac{5t^2 + 8t - 1}{50}$, а константе су $A = \frac{78}{125}$ и $B = \frac{47}{125}$.

3. *Група А.* Како је $y = \frac{1}{x}$ и $ds = \sqrt{1 + y'^2} = x^{-2}\sqrt{x^4+1}$, тражени интеграл је очигледном сменом $t = x^4 + 1$ једнак $\int_1^2 \sqrt{x^4+1}\, x^3 dx = \frac{1}{4}\int_2^{17} \sqrt{t}\, dt = \frac{1}{6}(17^{3/2} - 2^{3/2})$.

   Група Б. Променљиве x и y су замениле места, резултат је исти.

4. *Група Б.* Поставимо поларне координате: $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$; тада је $dxdy = r\, drd\varphi$. Опис области D је $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, па је тражени интеграл $\iint_D \frac{r\, drd\varphi}{2 - r^2} = \int_0^1 \frac{r\, dr}{2 - r^2} \int_0^\pi d\varphi = -\frac{1}{2}\pi \ln(2 - r^2)\big|_0^1 = \frac{1}{2}\pi \ln 2$.

   Група А. Интеграл је $\iint_D \frac{r\, drd\varphi}{2 + r^2}$, а резултат је $\frac{1}{2}\pi \ln\frac{3}{2}$.

5. *Група А.* Са Π означавамо горњу страну дате површи, а са D њену пројекцију на xy-раван. Тражени проток је $I = \iint_\Pi (dydz + x\, dzdx + y\, dxdy) = \iint_D (-z'_x - xz'_y + y)dxdy = \iint_D (-x^2)dxdy = \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 dy = \frac{1}{3}$.

   Група Б. Променљиве x и y су замениле места, резултат је исти.

6. Лако налазимо $\int_0^\infty e^{-xy}\sin(xy)\, dy = \frac{1}{2x}$, али тиме само сводимо тражени интеграл I на нееелементарни: $I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Више ћемо постићи ако у полазном интегралу променимо редослед интеграције: $I = \int_0^\infty dy \int_0^\infty e^{-xy}\sin x \sin(xy) dx = \int_0^\infty \frac{2y^2 dy}{4y^4 + 1} = \frac{\pi}{4}$. (Свакако, то значи и да је $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$.)