Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku

12.02.2024. godine

1. GRUPA

1. Red se očigledno može ograničiti sumom $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q^k}$ za $q > 1$, odakle uniformna i apsolutna konvergencija direktno slede.

2. a) Lagranžov interpolacioni polinom 4-og stepena glasi

$$\begin{aligned} P_3(x) = \ & \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)(-1-4.5)} \cdot (-3) + \frac{(x-(-1))(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)(0-4.5)} \cdot 1 \\ & + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)(x-4.5)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)(2-4.5)} \cdot 3 + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-4.5)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)(3-4.5)} \cdot 13 \\ & + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-3)}{(4.5-(-1))(4.5-0)(4.5-2)(4.5-3)} \cdot 20 \end{aligned}$$

Za $x = 1$ dobija se da je dati izraz jednak -0.5569

b) Čim je u pitanju polinom 3-eg stepena, ima 4 čvora koji dele interval $[0, 1]$ na 3 podintervala jednake dužine. Ocena za grešku interpolacije date funkcije u tački x na intervalu $[0, 1]$ glasi

$$R_3(x) \leq \frac{max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z)}{4!} \cdot \left|(x-0)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)\right|.$$

Pritom je

$$max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z) = max_{z\in[0,1]} 2^4 e^{2z} = 16 \cdot e^2.$$

Kako je $2x = \sqrt{2}$ za $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, imamo

$$R_3(x) \leq \frac{16 \cdot e^2}{4!} \cdot \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right)\right| = 0.0154.$$

3. *Rešenje*: Za datu funkciju, $f(x) = 5(e^{3x} - e^{-3x}) - 45x + 1$, važi $f'(x) = 15(e^{3x} + e^{-3x}) - 45$, tako da će, ma šta odabrali za x_0, iterativni korak glasiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{5(e^{3x_k} - e^{-3x_k}) - 45x_k + 1}{15(e^{3x_k} + e^{-3x_k}) - 45}$$

Drugi izvod, $f''(x) = 45(e^{3x} - e^{-3x})$, je negativan za $x < 0$ i pozitivan za $x > 0$, tako da prvo treba da vidimo da li se odgovarajuće rešenje nalazi levo ili desno od 0. Za početak, $f(0) = 1 > 0$, $f(-0.3) > 0$ i $f(0.3) < 0$, dakle rešenje se nalazi izmedju 0 i 0.3. Kako je $f'(0) = -15 < 0$, a i $f'(0.3) < 0$, to je na datom intervalu $f' < 0$ i $f'' > 0$ (SKICA OBAVEZNA), te se za nultu iteraciju uzima njegov levi kraj. Dakle, $x_0 = 0$. Sada se vrlo brzo dobija $x^* = 0.06759$.

4. Kako nam nije eksplicitno rečeno koju kvadraturnu forrmulu da koristimo, odlučujemo se za Simsonovu jer ima veći stepen tačnosti nego Trapezna. Jasno je da izvodi funkcije $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ nisu bas pristupačni za traženje maksimuma, pa je preporučljivije da grešku procenjujemo Runge-ovom metodom Da bismo mogli da primenimo formulu sa Runge-ovu ocenu greške, najlakše je da krenemo od koraka 0.5 i da ga prepolovljavamo dok se ne ostvari zadata tačnost.

   Za $x = 0$ data funkcija nije definisana, tako da za $f(0)$ treba da uzmemo $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ (na osnovu Lopitalovog pravila).

   Za $h = 0.5$ imamo

$$S_2^{(0.5)} = \frac{0.5}{3}\left(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\right) = 0.592252.$$

   a za $h = 0.25$

$$S_2^{(0.25)}(f) = \frac{0.25}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.25) + f(0.75)) + 2 \cdot f(0.5) + f(1))\right] = 0.610423.$$

   Ograničenje

$$\frac{|0.610423 - 0.592252|}{2^4 - 1} = 0.0012 > 0.0005$$

   očito nije dovoljno dobro, pa moramo dalje da polovimo korak. Za $h = 0.125$ je

$$\begin{aligned} S_2^{(0125)}(f) = \; & \frac{0.125}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))\right. \\ & \left. +2(f(0.250) + f(0.500) + f(0.750)) + f(1))\right] = 0.616952. \end{aligned}$$

   Sada je

$$R_2(f) \leq \left|\frac{S_2^{(0.125)}(f) - S_2^{(0.25)}(f)}{2^4 - 1}\right| = 0.000435 < 0.0005.$$

   odnosno

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.616952 \pm 0.000435.$$

2. GRUPA

1. Red se očigledno može ograničiti sumom $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{q^k}$ za $q > 1$, odakle uniformna i apsolutna konvergencija direktno slede.

2. a) Lagranžov interpolacioni polinom 4-og stepena glasi

$$
\begin{aligned}
P_3(x) = \quad & \frac{(x-0)(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(-1-0)(-1-2)(-1-3)(-1-4.5)} \cdot 20 + \frac{(x-(-1))(x-2)(x-3)(x-4.5)}{(0-(-1))(0-2)(0-3)(0-4.5)} \cdot 13 \\
& + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-3)(x-4.5)}{(2-(-1))(2-0)(2-3)(2-4.5)} \cdot 3 + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-4.5)}{(3-(-1))(3-0)(3-2)(3-4.5)} \cdot 1 \\
& + \frac{(x-(-1))(x-0)(x-2)(x-3)}{(4.5-(-1))(4.5-0)(4.5-2)(4.5-3)} \cdot (-3)
\end{aligned}
$$

Za $x = 1.5$ dobija se da je dati izraz jednak 4.6572.

b) Čim je u pitanju polinom 3-eg stepena, ima 4 čvora koji dele interval $[0, 1]$ na 3 podintervala jednake dužine. Ocena za grešku interpolacije date funkcije u tački x na intervalu $[0, 1]$ glasi

$$R_3(x) \leq \frac{max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z)}{4!} \cdot \left| (x-0)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1) \right|.$$

Pritom je

$$max_{z\in[0,1]} f^{(4)}(z) = max_{z\in[0,1]} 3^4 e^{3z} = 81 \cdot e^3.$$

Kako je $3x = \sqrt{3}$ za $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, imamo

$$R_3(x) \leq \frac{81 \cdot e^3}{4!} \cdot \left| \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 0\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1\right) \right| = 0.3605.$$

3. Za datu funkciju, $f(x) = 5(e^{2x} - e^{-2x}) - 30x + 1$, važi $f'(x) = 10(e^{2x} + e^{-2x}) - 30$, tako da će, ma šta odabrali za x_0, iterativni korak glasiti

$$x_{k+1} = x_k - \frac{5(e^{2x_k} - e^{-2x_k}) - 30x_k + 1}{10(e^{2x_k} + e^{-2x_k}) - 30}$$

Drugi izvod, $f''(x) = 20(e^{2x} - e^{-2x})$, je negativan za $x < 0$ i pozitivan za $x > 0$, tako da prvo treba da vidimo da li se odgovarajuće rešenje nalazi levo ili desno od 0. Za početak, $f(0) = 1 > 0$, $f(-0.4) = 4.1189 > 0$ i $f(0.4) = -2.1189 < 0$, dakle rešenje se nalazi izmedju 0 i 0.4. Kako je $f'(0) = -10 < 0$, a i $f'(0.4) = -3.2513 < 0$, to je na datom intervalu $f' < 0$ i $f'' > 0$ (SKICA OBAVEZNA), te se za nultu iteraciju uzima njegov levi kraj. Dakle, $x_0 = 0$. Sada se vrlo brzo dobija $x^* = 0.10139$.

4. Kako nam nije eksplicitno rečeno koju kvadraturnu forrmulu da koristimo, odlučujemo se za Simsonovu jer ima veći stepen tačnosti nego Trapezna. Jasno je da izvodi funkcije $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ nisu bas pristupačni za traženje maksimuma, pa je preporučljivije da grešku

procenjujemo Runge-ovom metodom Da bismo mogli da primenimo formulu sa Runge-ovu ocenu greške, najlakše je da krenemo od koraka 0.5 i da ga prepolovljavamo dok se ne ostvari zadata tačnost.

Za $x = 0$ data funkcija nije definisana, tako da za $f(0)$ treba da uzmemo $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ (na osnovu Lopitalovog pravila).

Za $h = 0.5$ imamo

$$S_2^{(0.5)} = \frac{0.5}{3}\left(f(0) + 4f(0.5) + f(1)\right) = 0.592252.$$

a za $h = 0.25$

$$S_2^{(0.25)}(f) = \frac{0.25}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.25) + f(0.75)) + 2\cdot f(0.5) + f(1))\right] = 0.610423.$$

Ograničenje

$$\frac{|0.610423 - 0.592252|}{2^4 - 1} = 0.0012 > 0.0005$$

očito nije dovoljno dobro, pa moramo dalje da polovimo korak. Za $h = 0.125$ je

$$\begin{aligned} S_2^{(0125)}(f) = \; & \frac{0.125}{3}\left[(f(0) + 4(f(0.125) + f(0.375) + f(0.625) + f(0.875))\right. \\ & \left.+2(f(0.250) + f(0.500) + f(0.750)) + f(1))\right] = 0.616952. \end{aligned}$$

Sada je

$$R_2(f) \le \left|\frac{S_2^{(0.125)}(f) - S_2^{(0.25)}(f)}{2^4 - 1}\right| = 0.000435 < 0.0005.$$

odnosno

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.616952 \pm 0.000435.$$

Aleksandar Pejčev