

1 Појам функције. Лимеси - теорија

1.1 Појам функције; преглед елементарних функција

Дефиниција 1.1. Нека су X и Y два непразна скупа. Правило које сваком елементу скупа X придружује тачно један елемент скупа Y се назива функција или пресликавање скупа X (домен функције) у скуп Y (кодомен функције).

- Функција $f : X \mapsto Y$ је „1 – 1” ако за све $x_1, x_2 \in X$ такве да је $x_1 \neq x_2$ важи $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- Функција $f : X \mapsto Y$ је „на” ако за свако $y \in Y$ постоји $x \in X$ такво да је $f(x) = y$.
- Функција $f : X \mapsto Y$ је бијекција ако је „1 – 1” и „на”. Тада постоји инверзна функција f^{-1} функције f . Важи $f^{-1}(f(x)) = x$ за свако $x \in X$ и $f(f^{-1}(y)) = y$ за свако $y \in Y$.

Ако су скупови X и Y подскупови скупа \mathbb{R} реалних бројева, тада је f реална функција реалне променљиве.

Нека је f реална функција реалне променљиве и $x_1, x_2 \in S \subset X$. Функција f је на скупу S

- *строго растућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) < f(x_2)$;
- *растућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) \leq f(x_2)$;
- *строго опадајућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) > f(x_2)$;
- *опадајућа* ако за $x_1 < x_2$ важи $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функција f је *монотона* ако задовољава један од претходна четири случаја.

Скуп свих тачака $\{(x, f(x)) | x \in X\}$ назива се *график* функције f .

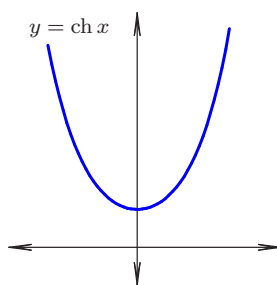
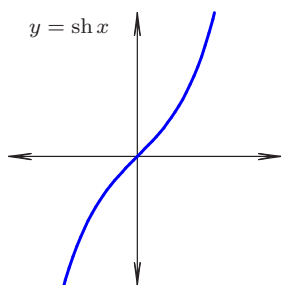
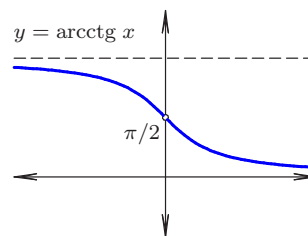
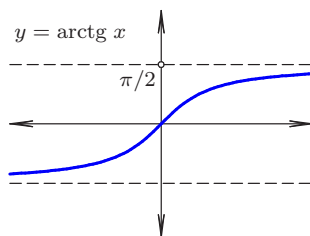
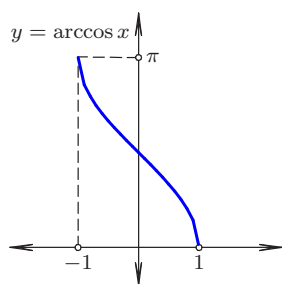
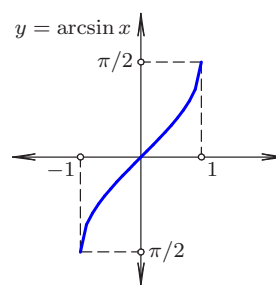
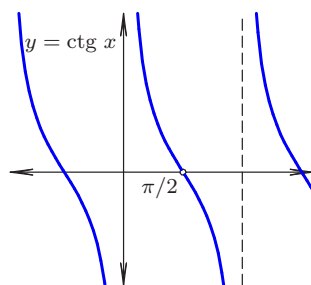
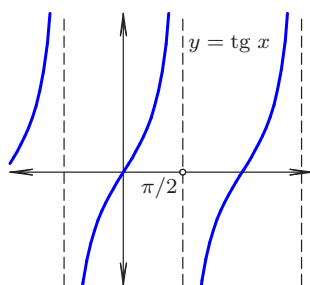
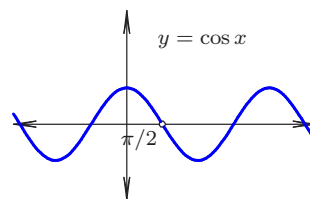
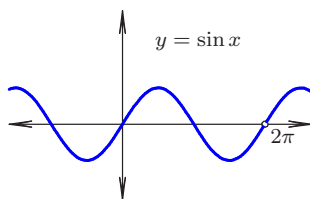
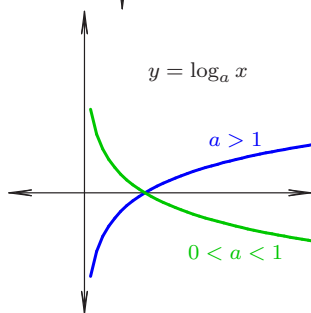
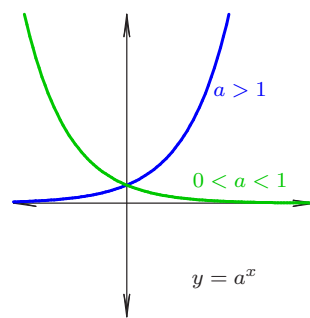
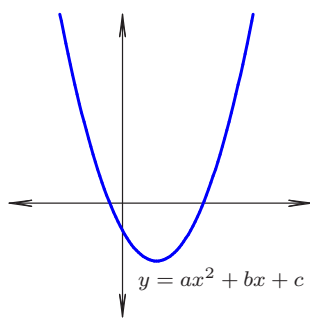
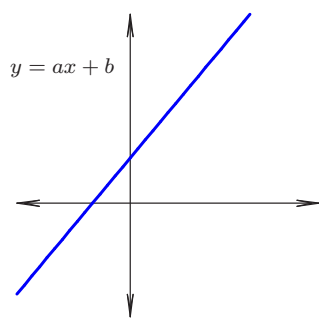
Следе графици основних елементарних функција:

- линеарне функције $y = ax + b$,
- квадратне функције $y = ax^2 + bx + c$,
- експоненцијалне функције $y = a^x$ за $0 < a < 1$ и $a > 1$,
- логаритамске функције $y = \log_a x$ за $0 < a < 1$ и $a > 1$ ($x > 0$),
- тригонометријских функција $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$,
- инверзних тригонометријских функција $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$,
- хиперболичких функција

- *синус хиперболички*: $y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ и
- *косинус хиперболички*: $y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Важи $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$. Одговарајуће инверзне функције су

- *ареа-синус хиперболички* $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ($x \in \mathbb{R}$) и
- *ареа-косинус хиперболички* $\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ($x > 1$).



1.2 Дефиниција и особине лимеса

Низ реалних бројева је функција $a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$. Примери низова су:

1° аритметички низ ($a_{n+1} - a_n = d$ за свако $n \in \mathbb{N}$);

2° геометријски низ ($\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ за свако $n \in \mathbb{N}$);

3° хармонијски низ $a_n = \frac{1}{n}$.

Дефиниција 1.2. (Лимес низа) Кажемо да је

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број N такав да, кад год је $n > N$ важи $|a_n - L| < \varepsilon$.

Другим речима, за свако довољно велико n вредност a_n је произвољно близу L .

Пример 1.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ (колико год малу околину нуле да изаберемо, постоји број N тако да је за све $n > N$ вредност $\frac{1}{n}$ у тој околини нуле). Формално, за произвољно $\varepsilon > 0$ треба да нађемо број N тако да за све $n > N$ важи $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$. Дакле, треба да буде $n > \frac{1}{\varepsilon}$ за све $n > N$, па је довољно да изаберемо неко N за које важи $N > \frac{1}{\varepsilon}$ (нпр. $N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1$).

Пример 1.2. Лимес геометријског низа:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ +\infty, & q > 1, \\ \text{не постоји,} & q \leq -1. \end{cases}$$

Под околином тачке a подразумевамо неки отворен интервал који садржи тачку a (околина тачке $+\infty$ је $(M, +\infty)$).

Дефиниција 1.3. (Лимес функције) Претпоставимо да је $f(x)$ функција дефинисана у некој околини тачке a , осим можда у самој тачки a . Кажемо да је

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да, кад год је $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$ важи $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Другим речима, за свако x довољно близу тачки a , вредност $f(x)$ је произвољно близу L . Ако је $a = \pm\infty$, израз „довољно близу” мењамо изразом „довољно далеко десно (односно лево)” и одговарајућу дефиницију треба томе прилагодити.

Ако лимес низа или функције постоји, кажемо да он(а) *конвергира*, а у супротном да *дивергира*.

Пример 1.3. Посматрајмо функцију сигнум:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{за } x < 0, \\ 0, & \text{за } x = 0, \\ 1, & \text{за } x > 0. \end{cases}$$

Ако пробамо да нађемо лимес функције у нули, видимо да је функција константно једнака -1 када x тежи нули слева, односно 1 ако x тежи нули здесна. Са друге стране је $f(0) = 0$. Како $f(x)$ не тежи једном броју, то лимес кад x тежи нули не постоји.

Дефиниција 1.4. (Леви и десни лимес) Кажемо да је леви (односно десни) лимес функције $f(x)$ када x тежи a једнак броју L , са ознаком

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L, \quad \text{односно} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L,$$

ако је за свако x довољно близу a и мање (односно веће) од a вредност $f(x)$ произвољно блиска L .

Видимо да је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ако и само ако постоје и леви и десни лимес и важи

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L.$$

Пример 1.4. Наводимо неке лимесе у крајевима области дефинисаности елементарних функција (погледати одговарајуће графике):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x &= 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x &= \pm \infty, & \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \operatorname{arctg} x &= \pm \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 1.5. Посматрајмо функцију $y = \frac{1}{x}$. Како је $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = -\infty$, а $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = +\infty$, то лимес дате функције у нули не постоји.

Теорема 1.1. (Особине лимеса) Претпоставимо да постоје лимеси $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Нека је c константа. Тада важи:

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow a} c &= c; & (2) \quad \lim_{x \rightarrow a} x &= a; \\ (3) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x); & (4) \quad \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] &= c \lim_{x \rightarrow a} f(x); \\ (5) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x); & (6) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \\ & & \text{ако је } \lim_{x \rightarrow a} g(x) &\neq 0. \end{aligned}$$

Теорема 1.2. Претпоставимо да постоје лимеси $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$. Ако у околини тачке $x = a$ важи $f(x) \geq h(x) \geq g(x)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, онда је и $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$.

Пример 1.6. Одредити $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

Како је

$$-\frac{1}{|x|} < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{|x|} \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|} = 0,$$

следи $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Нека је $g(x)$ строго позитивно у некој околини тачке a .

Ако је $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, кажемо да је $f(x)$ занемарљиво мало у поређењу са $g(x)$ и за то користимо ознаку *мало* „ o “:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{када} \quad x \rightarrow a.$$

Такође, ако је $\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничено у околини тачке a , тј. постоји константа $M > 0$ таква да у тој околини важи $|f(x)| \leq M \cdot |g(x)|$, користимо ознаку *велико* „ O “:

$$f(x) = O(g(x)) \quad \text{када} \quad x \rightarrow a.$$

Ако је $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, користити се ознака

$$f(x) \sim g(x) \quad \text{када} \quad x \rightarrow a$$

и каже се да је $f(x)$ асимптотски једнако $g(x)$ када $x \rightarrow a$.

1.3 Непрекидност

Дефиниција 1.5. Функција f је непрекидна у тачки a ако је $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Функција f је непрекидна здесна (слева) у тачки a ако је $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (односно $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$).

Функција f је непрекидна на интервалу ако је непрекидна у свакој тачки тог интервала (у крајевима интервала подразумевамо само непрекидност здесна/слева).

Неформално, непрекидност функције можемо да интерпретирамо као непрекидност њеног графика. Једно важно својство непрекидних функција је Болцано-Кошијева теорема о међувредности.

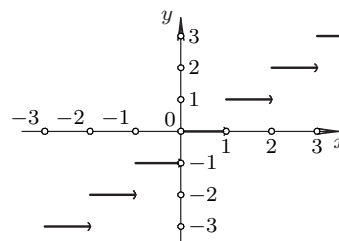
Теорема 1.3. (Теорема о међувредности) Нека је f непрекидна функција на интервалу $[a, b]$. Ако је $f(a) = A$, $f(b) = B$ и C произвољна вредност између A и B , онда постоји $c \in [a, b]$ за које је $f(c) = C$.

Пример 1.7. Посматрајмо функцију *цео део*: $[x]$ означава највећи цео број који није већи од x . На пример, $[1,5] = 1$, $[\pi] = 3$. Видимо да ова функција има прекиде у целим бројевима, док је у осталим тачкама непрекидна.

Заиста, ако a није цео број, функција $[x]$ је константна (дакле, непрекидна) у околини тачке $x = a$. С друге стране, ако је a цео број, онда је

$$\lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a-1 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a,$$

па $\lim_{x \rightarrow a} [x]$ не постоји и самим тим није једнак $[a]$.



Теорема 1.4. Ако су f и g непрекидне функције на неком интервалу, онда су и функције $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $f(x)/g(x)$ непрекидне у свом домену.

Теорема 1.5. Ако је функција f непрекидна у тачки b и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, онда $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$. Ако су функције f и g непрекидне, онда је и $f(g(x))$ непрекидна.

Теорема 1.6. Ако је функција f непрекидна и $1-1$ на интервалу (a, b) , онда је и њена инверзна функција f^{-1} непрекидна.

Теорема 1.7. Све елементарне функције су непрекидне у својим доменима.

Пример 1.8. Одредити $\lim_{x \rightarrow 1} \arctg \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2}}$.

Како је

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2(x^2 + x + 1)} = \frac{1+1}{2(1^2 + 1 + 1)} = \frac{1}{3},$$

из непрекидности функције $\arctg \sqrt{y}$ следи

$$\lim_{x \rightarrow 1} \arctg \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2}} = \arctg \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{2x^3 - 2}} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

1.4 Неки основни лимеси; задаци

Лимес рационалне функције кад $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_n x^n + \cdots + p_1 x + p_0}{q_m x^m + \cdots + q_1 x + q_0} = \begin{cases} +\infty, & \text{за } n > m \\ \frac{p_n}{q_m}, & \text{за } n = m \\ 0, & \text{за } n < m. \end{cases}$$

Пример 1.9. Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(x^2 - 1)^2}{x^5 - x^3 + 4}$.

Како $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ када $x \rightarrow \infty$, дељењем бројиоца и имениоца са x^5 добијамо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x(x^2 - 1)^2}{x^5 - x^3 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(1 - \frac{1}{x^2})^2}{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^5}} = \frac{2(1 - 0)^2}{1 - 0} = 2.$$

„Таблични” лимеси

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1. \end{array}$$

Приметимо да се већина ових лимеса једноставно може доказати применом Лопиталовог правила.

Пример 1.10. Израчунати $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$.

Задатак ћемо решити свођењем на познати лимес $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^4 \frac{x}{2}}{2^4 \left(\frac{x}{2}\right)^4} = \frac{1}{8}.$$

Пример 1.11. Израчунати $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x}$.

Користимо познати лимес $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-2}\right)^{(x-2) \frac{3x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}} = e^3.$$

Пример 1.12. Наћи асимптоте функције $y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}$.

Домен функције је $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Видимо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = \pm \infty,$$

па је права $x = 0$ вертикална асимптота. Даље је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = -1,$$

тј. права $y = -1$ је хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow -\infty$. Слично је

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{-x}}{1 - 2^{-x}} = 1,$$

па је права $y = 1$ хоризонтална асимптота кад $x \rightarrow \infty$.

Рада Мутавауић Буквић