5 Функције више променљивих

5.1 Оновни појмови

Реална функција n реалних променљивих је нека функција облика $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ дефинисана на неком скупу $D \subset \mathbb{R}^n$ са вредностима у скупу $\mathbb{R}$, дакле, $f : D \to \mathbb{R}$.

Специјално, посматрајмо функцију двеју променљивих $f(x, y)$, где је $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$. Њен график је површ у простору $\mathbb{R}^3$.

Пример 5.1. а) Домен функције $z = 2x - y - 3$ је цела раван $\mathbb{R}^2$. Њен график је такође раван у простору $\mathbb{R}^3$, чија је једначина $2x - y - z = 3$.
б) Домен функције $f = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ је затворен диск $x^2 + y^2 \leqslant 9$, а њен график је горња полусфера сфере полупречника 3 центриране у координатном почетку.

Растојање између тачака $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ у простору $\mathbb{R}^2$ је

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}.$$

Нека је $f : D \to \mathbb{R}$ функција на скупу $D \subseteq \mathbb{R}^2$ и нека је $(x_0, y_0) \in D$.

Дефиниција 5.1. Лимес $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ је једнак m ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји $\delta > 0$ такво да важи $|f(x, y) - m| < \varepsilon$ кад год је $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$.

Овде посматрамо приближавање тачки (x_0, y_0) по свакој кривој, па ако лимес постоји, он мора бити јединствен без обзира по којој се кривој приближавамо.

Поред лимеса $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ могу се посматрати и *поновљени* лимеси

$$\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x, y) \quad \text{и} \quad \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x, y).$$

Гранична вредност функције двеју променљивих не мора бити једнака поновљеним лимесима те функције.

Пример 5.2. Нека је $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$. Тада лимес $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ не постоји, док је

$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} f(x, y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} f(x, y) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Дефиниција 5.2. Функција f је непрекидна у тачки (x_0, y_0) ако је

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Функција f је непрекидна на скупу D ако је непрекидна у свакој тачки тог скупа.

Аналогно се дефинишу растојање, лимеси и непрекидност за функцију n променљивих. Нпр, растојање између тачака $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ у простору $\mathbb{R}^n$ је

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}.$$

5.2 Парцијални изводи и диференцијали

Нека је $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ функција n променљивих $x_1, x_2, \dots, x_n$. Парцијални извод по променљивој x_i је извод по промељивој x_i када се остале промељиве посматрају као константе.

Дефиниција 5.3. Први парцијални извод функције f по i-тој променљивој x_i у тачки $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ је

$$f_{x_i}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)}{h},$$

ако овај лимес постоји.

Пример 5.3. Парцијални изводи функције $z = x^y$ су $z'_x = yx^{y-1}$ и $z'_y = x^y \ln x$.

Ако парцијални извод $f_{x_i}(\mathbf{a})$ постоји, кажемо да је функција f *диференцијабилна* по променљивој x_i у тачки $\mathbf{a}$. Функција је *непрекидно диференцијабилна* по x_i ако је $f_{x_i}(\mathbf{a})$ непрекидна функција по $\mathbf{a}$. Функција f је *непрекидно диференцијабилна* ако је непрекидно диференцијабилна по свакој променљивој.

Градијент функције f је вектор

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) = (f'_{x_1}(\mathbf{a}), f'_{x_2}(\mathbf{a}), \dots, f'_{x_n}(\mathbf{a})).$$

Подсетимо се диференцијабилности у случају функције једне променљиве.

Дефиниција 5.4. Функција $f(x) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ је диференцијабилна у тачки $a \in \mathbb{R}$ ако важи

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \quad \text{кад} \quad x \to a.$$

Аналогно дефинишемо диференцијабилност функције више променљивих.

Дефиниција 5.5. Функција $f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ је диференцијабилна у тачки $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ако постоје сви парцијални изводи $f'_{x_1}, f'_{x_2}, \dots, f'_{x_n}$ у тачки $\mathbf{a}$ и ако важи

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|) \quad \text{кад} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \to 0.$$

где је $\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = f'_{x_1}(\mathbf{a})(x_1 - a_1) + f'_{x_2}(\mathbf{a})(x_2 - a_2) + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{a})(x_n - a_n)$ скаларни производ одговарајућих вектора.

Овај услов значи да је $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$ најбоља линеарна апроксимација функције f у околини тачке $\mathbf{a}$ (апроксимацију тангентном равни).

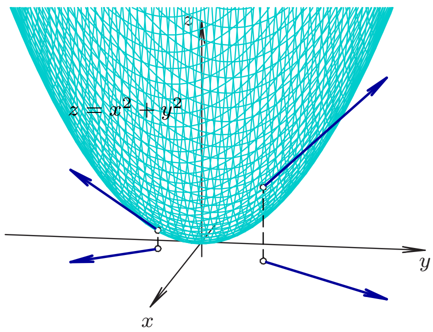
Први диференцијал функције f у тачки $\mathbf{a}$ је

$$df(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \vec{dx} = f'_{x_1}(\mathbf{a})dx_1 + f'_{x_2}(\mathbf{a})dx_2 + \dots + f'_{x_n}(\mathbf{a})dx_n$$

и представља бесконачно малу промене функције f при померају тачке $\mathbf{a}$ за бесконачно мали вектор $\vec{dx} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$.

Извод функције f у смеру датог вектора $\vec{v}$ је

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\mathbf{a} + h\vec{v}) - f(\mathbf{a})}{h|\vec{v}|} = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$



Скаларни производ у горњој формули је највећи када вектори $\nabla f(\mathbf{a})$ и $\vec{v}/|\vec{v}|$ имају исти смер.

Пример 5.4. На слици су представљени градијенти функције $z = x^2 + y^2$ у двема тачкама (вектори у Oxy координатној равни).

Градијенту функције у тачки одговара правац најстрмијег успона на површи у одговарајућој тачки.

Пример 5.5. Дата је функција $z = x^2 - xy + y^2$, тачка $M(1,1)$ и вектор $\vec{v} = (8,6)$.
Парцијални изводи функције z су $z'_x = 2x - y$ и $z'_y = -x + 2y$; градијент функције z и тачки M је $\nabla z(M) = (1,1)$; одговарајући први диференцијал је $dz = dx + dy$, а извод функције z у правцу вектора $\vec{v}$ у тачки M је $\frac{\partial z}{\partial \vec{v}}(M) = (1,1) \cdot \frac{(6,8)}{10} = \frac{7}{5}$

Парцијални изводи задовољавају исте релације као и обични изводи:

$$(f+g)_{x_i} = f_{x_i} + g_{x_i}, \quad (fg)_{x_i} = f_{x_i}g + fg_{x_i}, \quad \left(\frac{f}{g}\right)_{x_i} = \frac{f_{x_i}g - fg_{x_i}}{g^2}.$$

5.3 Парцијални изводи сложене функције

Нека су $g_1, \ldots, g_n$ диференцијабилне функције по k променљивих $x_1, \ldots, x_k$. На тај начин $f(g_1, \ldots, g_n)$ представља сложену функцију по $x_1, \ldots, x_k$.

Претпоставимо да се променљива x_i увећа за Δx_i.

Тада се g_j увећава за $\Delta g_j = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + o(\Delta x_i)$ када $\Delta x_i \to 0$.

При томе, f се увећава за $\Delta f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \Delta g_j + o(\Delta x_i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i + o(\Delta x_i)$.

Тиме је показано наредно тврђење.

Теорема 5.1. Ако су функције $f(g_1, \ldots, g_n)$ и $g_i(x_1, \ldots, x_k)$ за $1 \leqslant i \leqslant n$ диференцијабилне, онда је

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial g_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial x_i}.$$

На пример, ако је $f = f(u, v)$, при чему је $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и дате функције су диференцијабилне, важи

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Пример 5.6. Ако је $z = z\left(\frac{v}{u}\right)$, доказати да је $u \cdot z'_u + v \cdot z'_v = 0$.

Нека је $r = \frac{v}{u}$. Тада је $z = z(r(u, v))$, па је

$$z'_u = \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{dz}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial u} = z'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial u} \quad \text{и} \quad z'_v = \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{dz}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial v} = z'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial u}.$$

Даље је $\frac{\partial r}{\partial u} = -\frac{v}{u^2}$ и $\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{1}{u}$, па је

$$u \cdot z'_u + v \cdot z'_v = u\left(z'(r)\left(-\frac{v}{u^2}\right)\right) + u\left(z'(r) \cdot \frac{1}{u}\right) = 0.$$

Пример 5.7. Показати да је $x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$, где је $u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x^2}\right)$.

Нека је $r = \frac{y}{x^2}$. Тада је $\varphi = \varphi(r(x, y))$, па је

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \varphi'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \varphi'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial y}.$$

Даље је $\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{2y}{x^3}$ и $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$, па је

$$\frac{\partial u}{\partial x} = nx^{n-1}\varphi(r) + x^n \varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^n \varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial y}.$$

Дакле,

$$\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} &= x\left(nx^{n-1}\varphi(r) + x^n\varphi'(r)\left(-\frac{2y}{x^3}\right)\right) + 2yx^n\varphi'(r)\frac{1}{x^2} \\ &= nx^{n-1}\varphi(r) - 2yx^{n-2}\varphi'(r) + 2yx^{n-2}\varphi'(r) = nx^{n-1}\varphi(r). \end{aligned}$$

Функција $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ може да буде задата и *имплицитно*:

$$F(x_1, \ldots, x_n, f) = 0.$$

Диференцирањем дате једначине по x_i по правилу за извод сложене функције добијамо

$$F'_{x_i} + F'_f \cdot f'_{x_i} = 0.$$

Следи да су парцијални изводи имплицитно дате функције

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_f}.$$

Пример 5.8. Наћи диференцијал функције $u = u(x, y)$ дате једначином $\frac{x}{u} = \ln\frac{u}{y} + 1$.

Нека је $F(x, y, u(x, y)) = \ln\frac{u}{y} - \frac{x}{u} + 1$. Тада је $F'_x = -\frac{1}{u}$, $F'_y = \frac{y}{u}\left(-\frac{u}{y^2}\right) = -\frac{1}{y}$ и $F'_u = \frac{y}{u} \cdot \frac{1}{y} + \frac{x}{u^2} = \frac{1}{u} + \frac{x}{u^2}$. Сада је

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = \frac{1/u}{1/u + x/u^2} = \frac{u}{u+x} \quad \text{и} \quad u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = \frac{1/y}{1/u + x/u^2} = \frac{u^2}{y(u+x)}.$$

Дакле, $df = \frac{u}{u+x}dx + \frac{u^2}{y(u+x)}dy = \frac{u(ydx+udy)}{y(u+x)}$.

5.4 Парцијални изводи и диференцијали вишег реда

Индуктивно се уводе парцијални изводи вишег реда. На пример, други парцијални извод функције f по промењљивим x_i и x_i је

$$f''_{x_ix_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2},$$

а други парцијални извод функције f по промењљивим x_i и x_j (*мешовити парцијални извод*) је

$$f''_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Теорема 5.2. Ако је функција f двапут непрекидно диференцијабилна, важи

$$f''_{x_ix_j} = f''_{x_jx_i}.$$

Слично, ако је функција f непрекидно диференцијабилна k пута, мешовити парцијални изводи k-тог реда не зависе од редоследа диференцирања.

Такође се индуктивно уводе *диференцијали* вишег реда:

$$d^k f = d(d^{k-1} f),$$

где dx_i третирамо као константе.

Специјално, нека је $f = f(x, y)$ двапут непрекидно диференцијабилна функција. Тада је *први диференцијал* функције f

$$df = f'_x dx + f'_y dy,$$

па је *други диференцијал* функције f

$$d^2 f = d(df) = (f'_x dx + f'_y dy)'_x dx + (f'_x dx + f'_y dy)'_y dy = f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dxdy + f''_{yy} dy^2.$$

Слично је *трећи диференцијал* функције f

$$d^3 f = f'''_{xxx} dx^3 + 3f'''_{xxy} dx^2 dy + 3f'''_{xyy} dxdy^2 + f'''_{yyy} dy^3.$$

Приметимо да за ове диференцијале важи формула налик на биномну.

Посматрајмо још парцијалне изводе вишег реда сложене функције више промењљивих. Примера ради, нека је дата функција $f = f(u, v)$, при чему је $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ и дате функције су два пута непрекидно диференцијабилне. Тада је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\
&= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.
\end{aligned}$$

Пример 5.9. Ако је $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, показати да је $d^2 u \geqslant 0$ за произвољне $dx, dy \in \mathbb{R}$ и $(x, y) \neq (0, 0)$.

Налазимо прве и друге парцијалне изводе

$$u'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ u'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ u''_{xx} = \frac{y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\ u''_{xy} = \frac{-xy}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},\ u''_{yy} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

па је

$$d^2 u = u''_{xx} dx^2 + 2u''_{xy} dxdy + u''_{yy} dy^2 = \frac{x^2 dx^2 - 2xydxdy + y^2 dy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \frac{(xdx - ydy)^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \geqslant 0.$$

5.5 Задаци

Пример 5.10. Доказати да функција $z = \sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$ задовољава једначину $2xz'_x + 2yz'_y = z$.

Заменом парцијалних извода

$$z'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\frac{y}{x} + \sqrt{x}\cos\frac{y}{x}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sin\frac{y}{x} - \frac{2y}{x}\cos\frac{y}{x}\right) \quad \text{и}$$
$$z'_y = \sqrt{x}\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{y}{x}$$

дата једначина постаје тачна једнакост.

Пример 5.11. Наћи парцијалне изводе функције $z = z(x,y)$ дате једначином $x^2+y^2+z^2 = \sin(yz)$.

Диференцирајмо претходну једначину по x (y третирамо као константу):

$$2x + 2zz'_x = \cos(yz)yz'_x, \quad \text{па је} \quad z'_x = \frac{2x}{y\cos(yz) - 2z}.$$

Слично, диференцирањем дате једначине по y (x третирамо као константу) добијамо

$$2y + 2zz'_y = \cos(yz)(z + yz'_y), \quad \text{па је} \quad z'_y = \frac{2y - z\cos(yz)}{y\cos(yz) - 2z}.$$

Пример 5.12. Ако је $f = f\left(\frac{z}{y}, \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)$, где је f је диференцијабилна функција, израчунати

$$(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 2xz\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Ако уведемо ознаке $p = \frac{z}{y}$ и $q = \frac{x^2+y^2+z^2}{y}$, тада је:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{y}; \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{2x}{y}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{y^2-x^2-z^2}{y^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{2z}{y}.$$

Из $f = f(p,q)$, $p = p(x,y,z)$, $q = q(x,y,z)$ даље рачунамо:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{2x}{y},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{-z}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{y^2-x^2-z^2}{y^2},\\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{2z}{y},
\end{aligned}$$

одакле је:

$$\begin{aligned}
&(x^2-y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 2xz\frac{\partial f}{\partial z}\\
&= (x^2-y^2-z^2)\frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{2x}{y} + 2xy\left(\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{-z}{y^2} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{y^2-x^2-z^2}{y^2}\right) + 2xz\left(\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{1}{y} + \frac{\partial f}{\partial q}\cdot\frac{2z}{y}\right)\\
&= \left(-\frac{2xz}{y} + \frac{2xz}{y}\right)\frac{\partial f}{\partial p} + \left(\frac{2x}{y}(x^2-y^2-z^2) + \frac{2x}{y}(y^2-x^2-z^2) + \frac{4xz^2}{y}\right)\frac{\partial f}{\partial q} = 0.
\end{aligned}$$

Пример 5.13. Наћи $\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2}$, ако је $u = u(x,y)$, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Приметимо прво да је $\frac{\partial x}{\partial\rho} = \cos\varphi$ и $\frac{\partial y}{\partial\rho} = \sin\varphi$. Сада налазимо

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\sin\varphi.$$

Даље је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} &= \cos\varphi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}\right] + \sin\varphi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\rho}\right]\\
&= \cos\varphi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\sin\varphi\right] + \sin\varphi\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\sin\varphi\right]\\
&= \cos^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sin\varphi\cos\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\varphi\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\rho^2\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} = x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$