

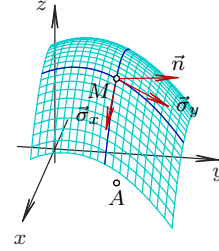
6 Парцијални изводи - примене

6.1 Тангентна раван

Нека је $z = z(x, y)$ непрекидно диференцијабилна (глатка) функција две променљиве. Њен график је нека површ у \mathbb{R}^3 . Тангентна раван у тачки $A(x_0, y_0)$ је раван која садржи све тангентне векторе кривих на површи које пролазе кроз тачку $M(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Да бисмо нашли једначину тангентне равни, треба нам *нормала на површ* z у одговарајућој тачки. Како је вектор положаја произвољне тачке на површи $\vec{\sigma} = (x, y, z(x, y))$, тангентни вектори на координатне криве $z(x, y_0)$ и $z(x_0, y)$ у тачки $A(x_0, y_0)$ су редом

$$\vec{\sigma}_x = (1, 0, z'_x(x_0, y_0)) \quad \text{и} \quad \vec{\sigma}_y = (0, 1, z'_y(x_0, y_0)).$$



Нормала \vec{n} на површ z је нормална на ова два вектора, па је

$$\vec{n} = \vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & z'_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & z'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = (-z'_x(x_0, y_0), -z'_y(x_0, y_0), 1).$$

Теорема 6.1. Једначина тангентне равни глатке површи $z = z(x, y)$ у тачки $A(x_0, y_0)$ је

$$z - z_0 = z'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + z'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Ако је површ $z = z(x, y)$ дата *имплицитно* функцијом $F(x, y, z) = 0$, тада је нормала на површ у тачки $M(x_0, y_0, z_0)$

$$\vec{n} = (F'_x(M), F'_y(M), F'_z(M)),$$

па је једначина тангентне равни у тачки M

$$F'_x(M)(x - x_0) + F'_y(M)(y - y_0) + F'_z(M)(z - z_0) = 0.$$

У случају *параметарски* дате површи $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, важи

$$\vec{n} = \vec{\sigma}_u \times \vec{\sigma}_v, \quad \text{где је} \quad \vec{\sigma}_u = (x'_u, y'_u, z'_u) \quad \text{и} \quad \vec{\sigma}_v = (x'_v, y'_v, z'_v).$$

Пример 6.1. Наћи једначину тангентне равни на површ $z = \sqrt{41 - 4x^2 - y^2}$ у тачки $(2, 3)$.

Једначина тражене тангентне равни је $z - z(2, 3) = z'_x(2, 3)(x - 2) + z'_y(2, 3)(y - 3)$.

Видимо да је $z(2, 3) = \sqrt{41 - 4 \cdot 2^2 - 3^2} = 4$ и налазимо

$$z'_x = \frac{-4x}{z}, \quad z'_y = \frac{-y}{z},$$

па је $z'_x(2, 3) = -2$ и $z'_y(2, 3) = -\frac{3}{4}$. Тражена раван је

$$z - 4 = -2(x - 2) - \frac{3}{4}(y - 3), \quad \text{тј.} \quad 8x + 3y + 4z = 41.$$

6.2 Тејлоров полином

Нека је $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференцијабилна функција и $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ тачка унутар њеног домена. Тада је линеарна апроксимација (тангентном равни) у околини тачке \mathbf{a}

$$f(\mathbf{x}) \approx T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

заправо *Тејлоров полином* првог степена за функцију f у околини тачке \mathbf{a} .

Ипак, оваква апроксимација нам често неће бити довољна, па под условом да је функција f диференцијабилна довољан број пута, можемо апроксимирати функцију f Тејлоровим полиномом T_k степена k . Тада ће се вредности функције f и свих њених извода до реда k поклапати са одговарајућим вредностима полинома T_k у тачки \mathbf{a} .

Теорема 6.2. Нека је функција $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференцијабилна k пута. Тејлоров полином степена k функције f у околини тачке $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ се може записати као

$$T_k(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + df(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}d^2f(\mathbf{a}) + \dots + \frac{1}{k!}d^kf(\mathbf{a}),$$

где је $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ и где након развоја „диференцијала” замењујемо dx_i са $x_i - a_i$.

Тада је

$$f(\mathbf{x}) = T_k(\mathbf{x}) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^k) \quad \text{кад} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \rightarrow 0.$$

Тејлоров полином степена 2 функције $f(x, y)$ у околини тачке (a, b) је

$$\begin{aligned} T_2(x, y) = & f(a, b) \\ & + f_x(a, b) \cdot (x - a) + f_y(a, b) \cdot (y - b) \\ & + \frac{1}{2!} (f_{xx}(a, b) \cdot (x - a)^2 + 2f_{xy}(a, b) \cdot (x - a)(y - b) + f_{yy}(a, b) \cdot (y - b)^2). \end{aligned}$$

Грешка која се јавља при апроксимацији полиномом степена k је

$$R_k(x, y) = f(x, y) - T_k(x, y) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1}f(a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)), \quad \theta \in (0, 1).$$

Ако је $(a, b) = (0, 0)$, полином T_k називамо Маклореновим полиномом.

Пример 6.2. Одредити Маклоренов полином степена 2 за функцију $z(x, y) = \ln(y + e^x)$.

Тражени полином налазимо по формули

$$T_2(x, y) = z(0, 0) + z'_x(0, 0)x + z'_y(0, 0)y + \frac{1}{2} (z''_{xx}(0, 0)x^2 + 2z''_{xy}(0, 0)xy + z''_{yy}(0, 0)y^2).$$

Потребни парцијални изводи су

$$z'_x = \frac{e^x}{y + e^x}, \quad z'_y = \frac{1}{y + e^x}, \quad z''_{xx} = \frac{ye^x}{(y + e^x)^2}, \quad z''_{xy} = -\frac{e^x}{(y + e^x)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{1}{(y + e^x)^2},$$

па је $z(0, 0) = 0$, $z'_x(0, 0) = 1$, $z'_y(0, 0) = 1$, $z''_{xx}(0, 0) = 0$, $z''_{xy}(0, 0) = -1$ и $z''_{yy}(0, 0) = -1$. Дакле,

$$T_2(x, y) = x + y - xy - \frac{1}{2}y^2.$$

6.3 Локалне екстремне вредности

Нека је $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференцијабилна функција и $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ тачка из унутрашњости њеног домена. Тачке за које важи

$$f'_{x_1}(\mathbf{a}) = \dots = f'_{x_n}(\mathbf{a}) = 0, \quad \text{тј.} \quad \nabla f(\mathbf{a}) = 0$$

се називају *стационарним тачкама*.

Ако је $f(x, y)$ функција по две променљиве, њене стационарне тачке су тачке у којима је тангентна раван хоризонтална.

Теорема 6.3. Тачка у којој функција f достиже локални екстремум може бити

(1°) њена стационарна тачка, или

(2°) тачка у којој функција f није диференцијабилна.

С друге стране, не мора свака стационарна тачка бити тачка екстремума - стационарне тачке које нису и тачке екстремума називамо *седластим тачкама*.

Нека је $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ је *стационарна тачка* двапут диференцијабилне функције $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тада у њеној околини важи

$$f(\mathbf{a} + \vec{dx}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2!}d^2f(\mathbf{a}),$$

јер је $df(\mathbf{a}) = 0$, а сви остали чланови су $o(\|\vec{dx}\|^2)$.

Тако долазимо до критеријума за екстремне вредности:

- (1°) ако је $d^2f(\mathbf{a}) > 0$ за све dx_1, dx_2, \dots, dx_n који нису сви нула, онда је \mathbf{a} тачка *локалног минимума* функције f ;
- (2°) ако је $d^2f(\mathbf{a}) < 0$ за све dx_1, dx_2, \dots, dx_n који нису сви нула, онда је \mathbf{a} тачка *локалног максимума* функције f ;
- (3°) ако $d^2f(\mathbf{a})$ мења знак, тј. ако може бити и позитивно и негативно у зависности од избора dx_1, dx_2, \dots, dx_n , онда \mathbf{a} није тачка локалног екстремума.

У случају (1°) кажемо да је квадратни полином d^2f *позитивно дефинитан*, а у случају (2°) *негативно дефинитан*. Критеријум за дефинитност полинома d^2f даје квадратна матрица других парцијалних извода

$$H_f = \begin{bmatrix} f''_{x_1x_1} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2x_2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix}$$

коју називамо *Хесијаном* функције f . Ако су други парцијални изводи непрекидни, тада су мешовити парцијални изводи једнаки, па је ова матрица симетрична.

Посматрајмо случај две променљиве. Ако је $f(x, y)$ двапут непрекидно диференцијабилна функција и $M(a, b)$ тачка у њеном домену, тада је

$$df^2(M) = Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2, \quad \text{где су} \quad A = f''_{xx}(M), \quad B = f''_{xy}(M) \text{ и } C = f''_{yy}(M).$$

Овај полином је увек позитиван ако и само ако је дискриминанта $4B^2 - 4AC = 4\Delta < 0$ и $A > 0$. Дакле, d^2f је позитивно дефинитан ако и само ако је $\Delta < 0$ и $A > 0$.

Теорема 6.4. Ако је $f = f(x, y)$ функција двеју променљивих и (a, b) је тачка локалног екстремума, онда је $f'_x(a, b) = f'_y(a, b) = 0$. Притом, ако означимо

$$A = f''_{xx}(a, b), \quad B = f''_{xy}(a, b), \quad C = f''_{yy}(a, b) \quad \text{и} \quad \Delta = B^2 - AC :$$

- ако је $\Delta < 0$ и $A > 0$, онда је (a, b) тачка *локалног минимума* функције f ;
- ако је $\Delta < 0$ и $A < 0$, онда је (a, b) тачка *локалног максимума* функције f ;
- ако је $\Delta > 0$, онда (a, b) није тачка локалног екстремума функције f ;
- ако је $\Delta = 0$, потребно је испитати изводе вишег реда...

У случају двапут непрекидно диференцијабилне функције $f(x, y, z)$ три променљиве, знак другог диференцијала d^2f се утврђује помоћу *Силвестеровог критеријума*: посматрамо квадратне водеће подматрице Хесијана и рачунамо њихове детерминанте

$$\Delta_1 = |f''_{xx}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{xz} & f''_{yz} & f''_{zz} \end{vmatrix}.$$

Нека је M_0 стационарна тачка.

$$(1^\circ) \quad d^2f(M_0) > 0 \Leftrightarrow \Delta_1(M_0) > 0, \Delta_2(M_0) > 0, \Delta_3(M_0) > 0;$$

$$(2^\circ) \quad d^2f(M_0) < 0 \Leftrightarrow \Delta_1(M_0) < 0, \Delta_2(M_0) > 0, \Delta_3(M_0) < 0.$$

Пример 6.3. Одредити локалне екстремне вредности функције $u(x, y) = 4 \ln x + 5 \ln y + \ln(20 - x - y)$.

Домен функције је $x > 0, y > 0, x + y < 20$. Први парцијални изводи су

$$u'_x = \frac{4}{x} - \frac{1}{20 - x - y} \quad \text{и} \quad u'_y = \frac{5}{y} - \frac{1}{20 - x - y}.$$

Стационарне тачке су решења система $u'_x = 0, u'_y = 0$, па постоји једна стационарна тачка $M(8, 10)$. Други парцијални изводи су

$$u''_{xx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{(20 - x - y)^2}, \quad u''_{xy} = -\frac{1}{(20 - x - y)^2} \quad \text{и} \quad u''_{yy} = -\frac{5}{y^2} - \frac{1}{(20 - x - y)^2}.$$

Даље је $A = u''_{xx}(M) = -\frac{5}{16}$, $B = u''_{xy}(M) = -\frac{1}{4}$, $C = u''_{yy}(M) = -\frac{3}{10}$, па је $\Delta = B^2 - AC = -\frac{1}{32} < 0$. Како је $A < 0$, тачка M је тачка локалног максимума функције.

Пример 6.4. Посматрајмо функцију $f(x, y) = x^2 - y^2$ (хиперболички параболоид).

Њена једина стационарна тачка је $M(0, 0)$. У тој тачки је $A = -C = 2$, $B = 0$ и $\Delta = 4 > 0$, па M није тачка локалног екстремума. Тачка M је локални максимум дуж једне криве на површи ($f(0, y)$), а локални минимум дуж друге ($f(x, 0)$).

Пример 6.5. Посматрајмо функцију $f(x, y) = x^3 + y^3$.

Њена једина стационарна тачка је $M(0, 0)$. У тој тачки је

$$df(M) = d^2 f(M) = 0,$$

али M није тачка локалног екстремума јер

$$d^3 f(M) = 6(dx^3 + dy^3)$$

може да буде и позитивно и негативно.

У општем случају, екстремне вредности функције могу бити у рубним тачкама домена, или у тачкама где функција није диференцијабилна.

Пример 6.6. Посматрајмо конус $z(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ за $x^2 + y^2 \leq 1$.

За $(x, y) = (0, 0)$ се постиже глобални максимум функције, $z_{\max} = 1$, а свака тачка кружнице $x^2 + y^2 = 1$ је глобални минимум, $z_{\min} = 0$. Како парцијални изводи

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

нису дефинисани за $(x, y) = (0, 0)$, ова функција нема стационарних тачака.

6.4 Задаци

Пример 6.7. Функцију $f(x, y) = \frac{\cos x}{1 + xy}$ апроксимирати Маклореновим полиномом другог степена.

Тражени полином налазимо по формули

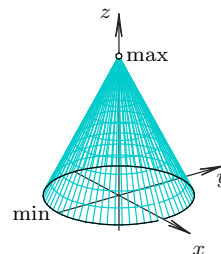
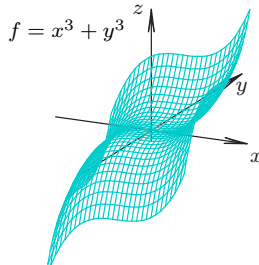
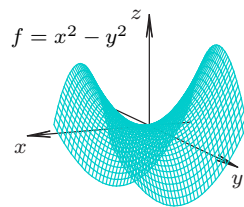
$$T_2(x, y) = f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \frac{1}{2}(f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2).$$

Потребни парцијални изводи су

$$\begin{aligned} f'_x &= \frac{-\sin x(1 + xy) - \cos x \cdot y}{(1 + xy)^2} = -\frac{\sin x}{1 + xy} - \frac{y \cos x}{(1 + xy)^2}, \\ f'_y &= -\frac{x \cos x}{(1 + xy)^2}, \\ f''_{xx} &= -\frac{\cos x(1 + xy) - \sin x \cdot y}{(1 + xy)^2} - \frac{-y \sin x(1 + xy)^2 - y \cos x \cdot 2(1 + xy)y}{(1 + xy)^4} \\ &= -\frac{\cos x}{1 + xy} + 2\frac{y \sin x}{(1 + xy)^2} + 2\frac{y^2 \cos x}{(1 + xy)^3}, \\ f''_{xy} &= \frac{x \sin x}{(1 + xy)^2} - \frac{\cos x(1 + xy)^2 - y \cos x \cdot 2(1 + xy)x}{(1 + xy)^4} \\ &= \frac{x \sin x}{(1 + xy)^2} - \frac{\cos x}{(1 + xy)^2} + 2\frac{xy \cos x}{(1 + xy)^3}, \\ f''_{yy} &= 2\frac{x^2 \cos x}{(1 + xy)^3}, \end{aligned}$$

па је $f(0, 0) = 1$, $f'_x(0, 0) = 0$, $f'_y(0, 0) = 0$, $f''_{xx}(0, 0) = -1$, $f''_{xy}(0, 0) = -1$ и $f''_{yy}(0, 0) = 0$. Дакле,

$$T_2(x, y) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - xy.$$



Пример 6.8. Наћи Тејлоров полином степена 2 за функцију $z(x, y)$ дату формулом $z^3 - 2xz + y = 0$ у околини тачке $(1, 1)$, при чему је $z(1, 1) = 1$.

Диференцирајмо дату једначину по x :

$$3z^2 z'_x - 2z - 2xz' = 0, \quad \text{тј.} \quad z'_x = \frac{2z}{3z^2 - 2x} \quad (1).$$

Слично, диференцирањем по y добијамо

$$3z^2 z'_y - 2xz'_y + 1 = 0, \quad \text{тј.} \quad z'_y = \frac{1}{2x - 3z^2} \quad (2).$$

Диференцирајмо сада једначину (1) по x :

$$z''_{xx} = 2 \frac{z'_x(3z^2 - 2x) - z(6zz'_x - 2)}{(3z^2 - 2x)^2} = 2 \frac{-3z^2 z'_x - 2xz'_x + 2z}{(3z^2 - 2x)^2}.$$

Слично, диференцирањем једначина (1) и (2) по y добијамо

$$z''_{xy} = 2 \frac{-3z'_y z^2 - 2xz'_y}{(3z^2 - 2x)^2} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{6zz'_y}{(3z^2 - 2x)^2}.$$

Заменом $(x, y) = (1, 1)$ у једначине (1) и (2) добијамо $z'_x(1, 1) = 2$ и $z'_y(1, 1) = -1$, чијом даљом заменом у друге парцијалне изводе добијамо $z''_{xx}(1, 1) = -16$, $z''_{xy}(1, 1) = 10$ и $z''_{yy}(1, 1) = -6$. Тражени Тејлоров полином је

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= z(1, 1) + z'_x(1, 1)(x - 1) + z'_y(1, 1)(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2} (z''_{xx}(1, 1)(x - 1)^2 + 2z''_{xy}(1, 1)(x - 1)(y - 1) + z''_{yy}(1, 1)(y - 1)^2) \\ &= 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2. \end{aligned}$$

Пример 6.9. Израчунати приближно $1,01^{1,98}$ помоћу развијања функције $z = x^y$ у Тејлоров полином другог степена у околи тачке $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Нека је $x = 1,01$, $y = 1,98$, $h = x - x_0 = 1,01 - 1 = 0,01$ и $k = y - y_0 = 1,98 - 2 = -0,02$. Одговарајући Тејлоров полином је

$$T_2(x, y) = z(1, 2) + z'_x(1, 2)h + z'_y(1, 2)k + \frac{1}{2} (z''_{xx}(1, 2)h^2 + 2z''_{xy}(1, 2)hk + z''_{yy}(1, 2)k^2),$$

а потребни парцијални изводи су

$$z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x, \quad z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \quad \text{и} \quad z''_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Следи да је $z(1, 2) = 1$, $z'_x(1, 2) = 2$, $z'_y(1, 2) = 0$, $z''_{xx}(1, 2) = 2$, $z''_{xy}(1, 2) = 1$ и $z''_{yy}(1, 2) = 0$. Дакле,

$$\begin{aligned} T_2(1, 2) &= 1 + 2 \cdot 0,01 + 0 \cdot (-0,02) + \frac{1}{2} (2 \cdot 0,01^2 + 2 \cdot 1 \cdot 0,01 \cdot (-0,02) + 0 \cdot (-0,02)^2) \\ &= 1 + 0,02 + 0,0001 - 0,0002 = 1,0199. \end{aligned}$$

Пример 6.10. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Стационарне тачке налазимо као решења система

$$\begin{cases} z'_x = 4x^3 - 4y = 0, \\ z'_y = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y, \\ y^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^9 = y, \\ y^3 = x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) \in \{(0, 0), (1, 1), (-1, -1)\}.$$

Означимо добијене стационарне тачке са $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$ и $M_3(-1, -1)$. Даље налазимо друге парцијалне изводе

$$z''_{xx} = 12x^2, \quad z''_{xy} = -4 \quad \text{и} \quad z''_{yy} = 12y^2.$$

У тачки M_1 је $A = z''_{xx}(0, 0) = 0$, $B = z''_{xy}(0, 0) = -4$, $C = z''_{yy}(0, 0) = 0$ и $\Delta = B^2 - 4AC = 16 > 0$, па у тачки M_1 функција нема екстремну вредност. За тачке M_2 и M_3 важи $A = C = 12$, $B = -4$ и $\Delta = -128 < 0$, па како је $A > 0$, тачке M_2 и M_3 су локални минимуми функције, $z_{\min} = -2$.

Пример 6.11. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x, y) = \frac{1}{xy} + \ln(x + y)^2$.

Област дефинисаности функције је $xy \neq 0, x + y \neq 0$. Први парцијални изводи су

$$z'_x = -\frac{1}{x^2 y} + \frac{2}{x + y} \quad \text{и} \quad z'_y = -\frac{1}{xy^2} + \frac{2}{x + y}.$$

Стационарне тачке су $M_1(1, 1)$ и $M_2(-1, -1)$. Други парцијални изводи су

$$z''_{xx} = \frac{2}{x^3 y} - \frac{2}{(x + y)^2}, \quad z''_{xy} = \frac{1}{x^2 y^2} - \frac{2}{(x + y)^2} \quad \text{и} \quad z''_{yy} = \frac{2}{xy^3} - \frac{2}{(x + y)^2}.$$

Даље је $A(M_1) = A(M_2) = \frac{3}{2}$, $B(M_1) = B(M_2) = \frac{1}{2}$, $C(M_1) = C(M_2) = \frac{3}{2}$, па је $\Delta(M_1) = \Delta(M_2) = B^2 - AC = -2 < 0$. Како је $A > 0$, у тачкама M_1 и M_2 функција има локални максимум, $z_{\min} = 1 + \ln 4$.

Пример 6.12. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x, y) = (x^2 - 2y^2)e^{-2x-2y}$.

Диференцирањем функције $z(x, y)$ по x и y добијамо:

$$z'_x = 2(x - x^2 + 2y^2)e^{-2x-2y}, \quad z'_y = 2(-2y - x^2 + 2y^2)e^{-2x-2y}.$$

Решавањем система $z'_x = 0, z'_y = 0$ налазимо да функција има две стационарне тачке: $M_1(0, 0)$ и $M_2(2, -1)$. Треба проверити да ли је у тим тачкама локални екстремум, па налазимо друге парцијалне изводе:

$$\begin{aligned} z''_{xx} &= 2(1 - 4x + 2x^2 - 4y^2)e^{-2x-2y}, \\ z''_{xy} &= 2(-2x + 4y + 2x^2 - 4y^2)e^{-2x-2y}, \\ z''_{yy} &= 2(-2 + 8y + 2x^2 - 4y^2)e^{-2x-2y}. \end{aligned}$$

У тачки M_1 је $A = z''_{xx} = 2, B = z''_{xy} = 0$ и $C = z''_{yy} = -4$, па је $\Delta = B^2 - AC = -8 > 0$ и ту функција нема екстремум.

У тачки M_2 је $A = -\frac{6}{e^2}, B = -\frac{8}{e^2}$ и $C = -\frac{12}{e^2}$, па је $\Delta = -\frac{8}{e^4} < 0$ и како је $A < 0$, M_2 је тачка локалног максимума, $z(M_2) = \frac{2}{e^2}$.

Пример 6.13. Одредити локалне екстремне вредности функције $z(x, y) = xye^{1-x^2-y^2}$.

Први парцијални изводи су

$$z'_x = -y(2x^2 - 1)e^{1-x^2-y^2}, \quad z'_y = -x(2y^2 - 1)e^{1-x^2-y^2}.$$

Решавањем система $z'_x = z'_y = 0$ налазимо да функција има пет стационарних тачка: $M_1(0, 0)$, $M_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $M_4(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $M_5(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Други парцијални изводи су

$$z''_{xx} = 2xy(2x^2 - 3)e^{1-x^2-y^2}, \quad z''_{xy} = (2x^2 - 1)(2y^2 - 1)e^{1-x^2-y^2}, \quad z''_{yy} = 2xy(2y^2 - 3)e^{1-x^2-y^2}.$$

За тачку M_1 је $A = C = 0$ и $B = e$, па је $\Delta = e^2 > 0$ и тачка M_1 није тачка екстремума. За остале стационарне тачке се на исти начин добија да су M_2 и M_4 тачке локалног минимума ($z_{\min} = -\frac{1}{2}$), а тачке M_3 и M_5 тачке локалног максимума ($z_{\max} = \frac{1}{2}$).

Пример 6.14. Наћи стационарне тачке функције $z(x, y) = xy - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{8}{x-y}$.

Парцијални изводи су $z'_x = y + \frac{1}{x^2} - \frac{8}{(x-y)^2}$ и $z'_y = x - \frac{1}{y^2} + \frac{8}{(x-y)^2}$. Стационарне тачке налазимо решавањем система $z'_x = 0, z'_y = 0$. Одузимањем друге од прве једначине добијамо $x + y + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = 0$, одакле је $x + y = 0$ или $x - y = x^2y^2$. Заменом првог услова у, рецимо, једначину $z'_x = 0$ једноставно добијамо стационарну тачку $M_1(-1, 1)$. Други услов захтева мало сналажења:

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2y+1}{x^2} = \frac{8}{(x-y)^2} \\ \frac{xy^2-1}{y^2} = \frac{-8}{(x-y)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2(x^2y+1) = 8x^2 \\ (x-y)^2(1-xy^2) = 8y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2(xy + \frac{1}{x}) = 8x \\ (x-y)^2(\frac{1}{y} - xy) = 8y \end{cases}$$

Сабирањем претходне две једначине добијамо $(x-y)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = 8(x+y)$, тј. $(x-y)^2 = 8xy$, који нам заједно са условом $x - y = x^2y^2$ даје систем $xy = 2, x - y = 4$. Решења овог система су стационарне тачке $M_2(2 + \sqrt{6}, -2 + \sqrt{6})$ и $M_3(2 - \sqrt{6}, -2 - \sqrt{6})$.

Пример 6.15. Наћи локалне екстремне вредности функције $u = 2x^2 + \frac{y^2}{x} - 4z + \frac{2z^2}{y}$.

Први парцијални изводи су

$$u'_x = 4x - \frac{y^2}{x^2}, \quad u'_y = \frac{2y}{x} - \frac{2z^2}{y^2}, \quad u'_z = -4 + \frac{4z}{y},$$

а решење система $u'_x = u'_y = u'_z = 0$ је стационарна тачка $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Други парцијални изводи су

$$u''_{xx} = 4 + \frac{2y^2}{x^3}, \quad u''_{xy} = -\frac{2y}{x^2}, \quad u''_{xz} = 0, \quad u''_{yy} = \frac{2}{x} + \frac{4z^2}{y^3}, \quad u''_{yz} = -\frac{4z}{y}, \quad u''_{zz} = \frac{4}{y}.$$

Даље је

$$\Delta_1(M) = 12 > 0, \quad \Delta_2(M) = \begin{vmatrix} 12 & -8 \\ -8 & 24 \end{vmatrix} = 224 > 0, \quad \Delta_3(M) = \begin{vmatrix} 12 & -8 & 0 \\ -8 & 24 & -16 \\ 0 & -16 & 16 \end{vmatrix} = 512 > 0,$$

па је у тачки $M(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ функција u постиже локални минимум, $u_{\min} = -\frac{1}{8}$.