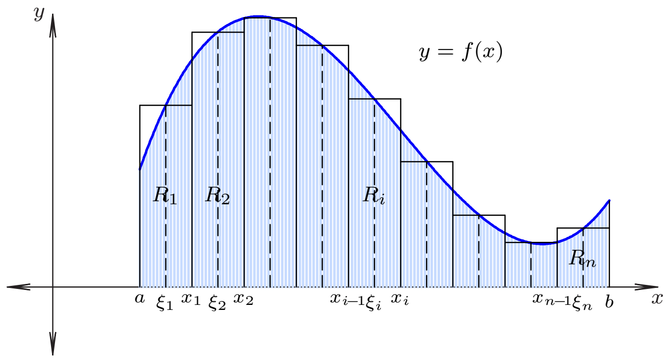
9 Интеграли - одређени, несвојствени, примене

9.1 Одређени интеграл

Нека је $f(x)$ непрекидна и ненегативна функција дефинисана на затвореном интервалу $[a, b]$. Желимо да нађемо површину дела равни S омеђену функицијом $y = f(x)$, x-осом и правама $x = a$ и $x = b$.



Поделимо интервал $[a, b]$ у n подинтервала дефинисаних тачкама $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Означимо овакву поделу интервала са P. Дужина подинтервала $[x_{i-1}, x_i]$ је $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, па су у општем случају ови подинтервали различите дужине. Дужина највећег поинтервала представља дијаметар поделе P и означава са $\|P\|$,

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\}.$$

Нека су $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ изабране тачке. Тада површину S апроксимирамо збиром површина правоугаоника R_i,

$$S \approx \Delta x_1 f(\xi_1) + \Delta x_2 f(\xi_2) + \cdots + \Delta x_n f(\xi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ову суму називамо *Римановом сумом.*

Када подела P тежи „најфинијој могућој”, тј. када $\|P\| \to 0$, добијамо

$$S = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ако овај лимес постоји и ако је коначан за ма какву поделу P, зваћемо га *одређени интеграл у Римановом смислу функције* $f(x)$ у границама од a до b и означаваћемо га са

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

У том случају кажемо да је функција $f(x)$ интеграбилна на интервалу $[a, b]$. Да би произвољна функција била интеграбилна на неком интервалу $[a, b]$, довољно је да је непрекидна на њему, или да има коначан број прекида I врсте.

Важније особине одређеног интеграла:

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0;$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x;$
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad (a < c < b);$

- ако је f парна функција, важи $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$;
- ако је f непарна функција, важи $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- $\int_a^b (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

Теорема 9.1. (Њутн-Лајбницова формула.) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$, тада на том интервалу постоји неодређени интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$ $(C = \text{const})$ и важи

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Теорема 9.2. (Смена променљиве код одређеног интеграла.) Ако је функција $f(x)$ непрекидна на $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$ непрекидна заједно са својим изводом $\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$, где је $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, тада је

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Теорема 9.3. (Парцијална интеграција код одређеног интеграла.) Ако су функције $u = u(x)$ и $v = v(x)$ диференцијабилне на одсечку $[a, b]$, тада је

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

Пример 9.1. Израчунати $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{3 + \cos x}$.

$$I = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}}{3 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Пример 9.2. Израчунати интеграл $\int_0^1 x^2 \ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x$.

Овде користимо парцијалну интеграцију:

$$\int_0^1 x^2 \ln(1+3x^2)\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln(1+3x^2) & \mathrm{d}v = x^2\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u = \frac{6x}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x & v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln(1+3x^2)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^4}{1+3x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{9x^4 - 1 + 1}{3x^2+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}\int_0^1 (3x^2 - 1)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{9}\int_0^1 \frac{dx}{1+3x^2} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}x = t \\ \sqrt{3}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9}(x^3 - x)\Big|_0^1 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{9\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2\pi}{27\sqrt{3}} \approx 0,32774.$$

Пример 9.3. Израчунати $I_2 = \int_0^{\pi/4} (\cos 2x)^{3/2} \cos x\,\mathrm{d}x$.

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} (1 - 2\sin^2 x)^{3/2} \cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 2t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}t = \sin u \\ \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 u)^{3/2} \cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \cos^4 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos 2u}{2}\right)^2 \mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} \left(1 + 2\cos 2u + \frac{1 + \cos 4u}{2}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}u + \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

Пример 9.4. Израчунати $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \,\mathrm{d}x$.

Показано је код неодређених интеграла да је
$$\int \sin^n x \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}x - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n},$$
па је
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$
при чему је
$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 1.$$
За $n = 2k$ важи
$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k-3}{2k-2} I_{2k-4} = \cdots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 1}{2k(2k-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2}.$$
Слично, за $n = 2k+1$ важи
$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k}{2k+1}\cdot\frac{2k-2}{2k-1} I_{2k-3} = \frac{2k(2k-2)\cdots 2}{(2k+1)(2k-1)\cdots 3} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Пример 9.5. Наћи $\int_0^{\pi} \frac{\sin 153x}{\sin x} \,\mathrm{d}x$.

Означимо $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{x} \,\mathrm{d}x$ и пођимо од израза $I_n - I_{n-2}$. Ако искористимо формулу $\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$, тај израз се своди на
$$I_n - I_{n-2} = 2\int_0^{\pi} \frac{\cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{n-1}\sin(n-1)x\Big|_0^{\pi} = 0,$$
па је $I_n = I_{n-2}$. У нашем случају је $I_{153} = I_{151} = \cdots = I_1 = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x = \pi$.

9.2 Несвојствени интеграл

Постоје две врсте несвојствених интеграла:

(1) Интеграл неограничене функције (несвојствени интегрла прве врсте)

Ако је $f(x)$ неограничена у тачки $c \in [a,b]$ и непрекидна за $x \in [a,c) \cup (c,b]$, тада је
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0+}\int_{c+\delta}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Интеграл са бесконачним границама (несвојствени интеграл друге врсте).

Ако је $f(x)$ непрекидна за $x \in [a,+\infty)$, важи
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Аналогно се дефинише на интервалу $(-\infty, b)$.

Ако лимеси постоје и коначни су кажемо да интеграл конвергира, а у супротном да дивергира.

Нека је $a < c < b$. Интеграл $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ конвергира ако и само конвергира $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ и важи
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пример 9.6. Израчунати $I_3 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x$.

Одговарајући неодређени интеграл је
$$\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+3}{\sqrt{x^2-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x)}{\sqrt{x^2-x}} + \frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-1/2)^2-1/4}}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2-x}}{1/2} + \frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x}) + C,$$
па је
$$I_3 = \left(\sqrt{x^2-x} + \frac{3}{2}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x})\right)\Big|_{-1/2}^{0} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\ln(2-\sqrt{3}) \approx 1,10941.$$

Пример 9.7. Израчунати $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$.

Дати интеграл I је несвојствен - има неограничену горњу границу и подинтегрална функција није дефинисана за $x = 1$. Зато ћемо га написати као збир два интеграла $I = I_1 + I_2$, при чему је $I_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$ и $I_2 = \int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}}$. Израчунајмо прво неодређени интеграл

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-1}} = \begin{bmatrix} \sqrt{x-1} = t, \ x = t^2+1 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + c = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1} + c.$$

Тада је $I_1 = \lim_{a\to 1} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\,|_a^2 = \frac{\pi}{2}$, и $I_2 = \lim_{b\to\infty} 2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}\,|_2^b = \pi - \frac{\pi}{2}$ па је $I = \pi$.

Пример 9.8. Израчунати $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{(1+\sin x)(1-\frac{1}{2}\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Сменом $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$ дати интеграл се своди на $\int_0^\infty \frac{8t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$. Даље уводимо смену $1+t^3 = u$, $t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u$, па је полазни интеграл једнак

$$\frac{8}{3}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = \frac{8}{3}\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{u}\right)\Big|_1^b = \frac{8}{3}.$$

Пример 9.9. Израчунати $I = \displaystyle\int_1^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = \ln x, & \mathrm{d}v = \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}, \\ \mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{x}, & v = -\dfrac{1}{2(1+x^2)} \end{bmatrix} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)}\Big|_1^b + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\right)$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{2}\int_1^b \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^b \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right)\Big|_1^b = \frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\ln b - \frac{1}{2}(\ln(1+b^2) - \ln 2)\right)$$
$$= \frac{1}{4}\lim_{b\to\infty}\ln\frac{b^2}{b^2+1} + \frac{\ln 2}{4} = \frac{\ln 2}{4}.$$

Пример 9.10. Израчунати $I = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x - 1/x = t, \quad \left(1 - 1/x^2\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t, \\ \left(x-1/x\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + 1/x^2 = t^2+2, \\ x = 0 \Rightarrow t = -\infty, \quad x = \infty \Rightarrow t = \infty \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_a^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_0^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Пример 9.11. Израчунати $\displaystyle\int_0^\infty x^{10}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Полазећи од интеграла

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} u = x^n, & \mathrm{d}v = e^{-x}\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, & v = -e^{-x} \end{bmatrix} = \lim_{b\to\infty}\left(-x^n e^{-x}\Big|_0^b\right) + nI_{n-1} = nI_{n-1},$$

при чему је $I_0 = 1$, добијамо да је $I_n = n!$. Дакле, $I_{10} = 10!$.

Интеграл I_n дефинише *Гама функцију*, која представља продужење факторијел функције.

9.3 Примена интеграла

Површина равног лика

Нека је γ непрекидна крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата функцијом $y = f(x)$ за $x \in [a, b]$, тада је површина између лука криве $f(x)$ и $x-$осе на интервалу $[a, b]$

$$P = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Последично, поврсина фигуре у равни одређена кривим $f_1(x)$ и $f_2(x)$ је

$$P = \int_a^b |f_2(x) - f_1(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тада је површина фигуре одређене кривом γ за $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2\,\mathrm{d}\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1, t_2]$ и нека је P површина између криве γ и $x-$осе. Разликује наредне случајеве.

(1) Ако је $x(t)$ растућа и $y(t) \geqslant 0$ или је $x(t)$ опадајућа и $y(t) \leqslant 0$, онда је

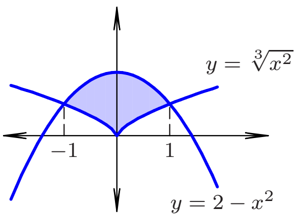
$$P = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

(2) Ако је $x(t)$ опадајућа и $y(t) \geqslant 0$ или је $x(t)$ растућа и $y(t) \leqslant 0$, онда је

$$P = -\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 9.12. Израчунати површину омеђену кривим $y = 2 - x^2$ и $y^3 = x^2$.
Нађимо пресечне тачке датих кривих:

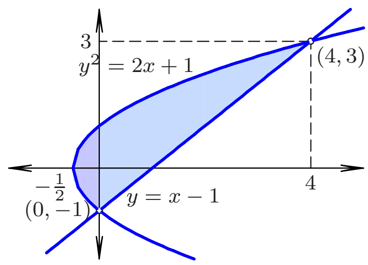
$$\begin{cases} y = 2 - x^2 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 - y^3 \\ y^3 = x^2 \end{cases} \Rightarrow y = 1,\ x = \pm 1,$$



па је површина између кривих $y = 2 - x^2$ и $y = \sqrt[3]{x^2}$

$$P = \int_{-1}^{1} (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x = \frac{32}{15}.$$

Пример 9.13. Израчунати површину омеђену кривим $y^2 = 2x + 1$ и $x - y - 1 = 0$.
Крива $y^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$ је парабола са теменом $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ која сече $y-$осу у тачкама $(0, -1)$ и $(0, 1)$. Нађимо пресечне тачке датих кривих:



$$\begin{cases} y^2 = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 2x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,\ y_1 = -1; \\ x_2 = 4,\ y_2 = 3. \end{cases}$$

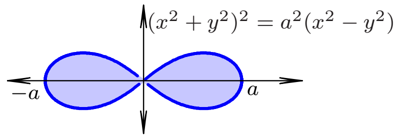
Тражену површину P налазимо као збир површине P_1 између кривих $y = -\sqrt{2x+1}$ и $y = \sqrt{2x+1}$ на $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ и површине P_2 између кривих $y = x - 1$ и $y = \sqrt{2x+1}$ на $[0, 4]$. Дакле,

$$P = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (\sqrt{2x+1} - (-\sqrt{2x+1}))\,\mathrm{d}x + \int_0^4 (\sqrt{2x+1} - (x-1))\,\mathrm{d}x = \cdots = \frac{16}{3}.$$

Други начин би био да посматрамо дате криве као функције од y: $x = \frac{1}{2}\left(y^2 - 1\right)$, $x = y + 1$, па да површину рачунамо као интеграл дуж $y-$осе:

$$P = \int_{-1}^{3} \left(y + 1 - \frac{y^2 - 1}{2}\right)\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{16}{3}.$$

Пример 9.14. Наћи површину фигуре ограничене кривом $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (Бернулијевом лемнискатом).
Преласком на поларне координате $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ добијамо једначину $(\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)$, одакле је $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$. Видимо да мора бити $\cos 2\varphi \geqslant 0$, тј. $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$. Због периодичности функције $\cos 2\varphi$ тражена површина је

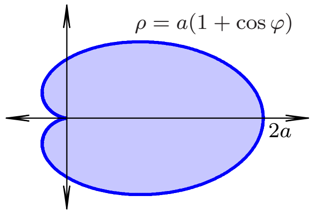


$$P = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^2\,\mathrm{d}\varphi = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\pi/4} a^2\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2\frac{\sin 2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

Пример 9.15. Наћи површину кардиоиде $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $a > 0$.

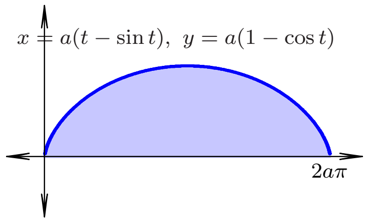
Тражена површина је

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi = a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\frac{1+\cos 2\varphi}{2})\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= a^2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2}a^2\pi.$$



Пример 9.16. Наћи површину P ограничену једним луком циклоиде $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ и $x-$осом ($a > 0$ и $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$).

$$P = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= a^2\int_0^{2\pi}\left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)\,\mathrm{d}t = 3a^2\pi.$$



Дужина лука криве

Нека је γ глатка крива.

Експлицитно задата крива. Ако је крива γ дата једначином $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. Тада је дужина лука криве γ

$$L = \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Крива у поларним координатама. Нека је крива γ дата у поларним координатама $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha,\beta]$. Дужина лука криве γ је

$$L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho(\varphi)^2+\rho'(\varphi)^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Крива у параметарском облику. Нека је крива γ задата параметарски: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1,t_2]$. Дужина лука криве γ је

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Пример 9.17. Наћи дужину лука криве $y = \ln\cos x$ за $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

Дужина лука криве $y = y(x)$ за $x \in [a,b]$ се рачуна по формули $L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x$. У нашем случају је $1+(y'(x))^2 = 1+\operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$, па је

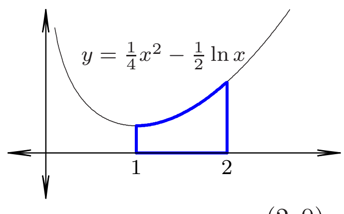
$$L = \int_0^{\pi/4}\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int_0^{\pi/4}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{1-\sin^2 x}.$$

Увођењем смене $\sin x = t$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $t = 0$ за $x = 0$ и $t = 1/\sqrt{2}$ за $x = \pi/4$ добијамо да је

$$L = \int_0^{1/\sqrt{2}}\frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\,|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \ln(\sqrt{2}+1) \approx 0,8814.$$

Пример 9.18. Наћи обим фигуре одређене кривом $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ и правама $x = 1,\ x = 2,\ y = 0$.
Дужина лука L дате криве за $x \in [1,2]$ је

$$L = \int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2\sqrt{\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big|_1^2 = \frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$



Дужина дужи од тачке $(1,0)$ до тачке $(1,y(1))$ је $y(1) = \frac{1}{4}$; дужина дужи од тачке $(2,0)$ до тачке $(2,y(2))$ је $y(2) = 1-\frac{1}{2}\ln 2$. Коначо, дужина сегмента на $x-$оси од тачке $(1,0)$ до тачке $(2,0)$ је 1, па је тражени обим

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}\ln 2+1 = 3.$$

Пример 9.19. Наћи дужину лука криве $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}=1$, $a\neq b$.

Преласком на параметарски облик криве $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$, добијамо да је њена дужуна лука

$$\begin{aligned}
L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9b^2\sin^4 t\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&=3\int_0^{2\pi}|\cos t\sin t|\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=12\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\sqrt{a^2\frac{1+\cos 2t}{2}+b^2\frac{1-\cos 2t}{2}}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{6}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\sin 2t\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)\cos 2t}\,\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}\cos 2t=u, & -2\sin 2t\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}u,\\ t=0\Rightarrow u=1, & t=\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u=-1\end{bmatrix}\\
&=\frac{3}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{a^2+b^2+(a^2-b^2)u}\,\mathrm{d}u=\frac{3}{\sqrt{2}(a^2-b^2)}\frac{(a^2+b^2+(a^2-b^2)u)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{-1}^{1}=\frac{4(a^2+ab+b^2)}{a+b}.
\end{aligned}$$