Машински факултет, Београд 31. март 2021.

Први колоквијум из Анализе - ИТМ

Група 1

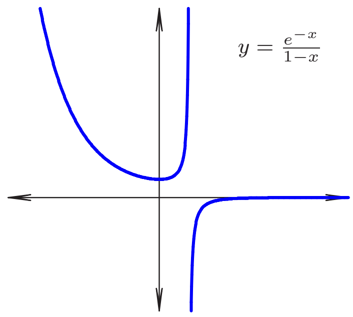
1. Израчунати $L = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

   Коришћењем Маклоренових развоја $\sin x = x + o(x)$ и $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ кад $x \to 0$ добијамо
$$\sqrt{1+x\sin x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)} \quad \text{и} \quad \sqrt{\cos x} = \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)}.$$
   Затим се може користити Маклоренов развој $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$:
$$\sqrt{1+x^2+o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{и} \quad \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$
   Дакле,
$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{2}-1+\frac{x^2}{4}+o(x^2)} = \frac{4}{3}.$$

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$.

   Домен функције је $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; $f>0$ за $x<1$ и $f<0$ за $x>1$. Функција нема нула, није ни парна ни непара. Права $x=1$ је вертикална асимптота, јер је $\lim\limits_{x\to 1\pm} f(x) = \mp\infty$.

   Даље је $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$, па је права $y=0$ хоризонтална асимптота кад $x\to\infty$.
   Први извод је $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$, па функција опада за $x<0$, расте за $x \in (0,1)\cup(1,\infty)$ и има минимум у тачки $M(0,1)$.



   Други извод је $f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2+1)}{(1-x)^3}$, па је функција конвексна за $x<1$ и конкавна за $x>1$.

3. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију $y=y(x)$ дату једначином $x+y = \operatorname{arctg}(xy)$.

   Прво приметимо да је $y=0$ за $x=0$. Диференцирањем дате једначине (по x) добијамо
$$1+y' = \frac{y+xy'}{1+(xy)^2},$$
   одакле за $x=y=0$ добијамо $y'(0)=-1$. Даљим диференцирањем добијамо
$$y'' = \frac{(y'+y'+xy'')(1+(xy)^2)-(y+xy')2xy(y+xy')}{(1+(xy)^2)^2},$$
   одакле за $x=y=0$ и $y'(0)=-1$ добијамо $y''(0)=-2$. Тражени Маклоренов полином је $T_2(x) = -x-x^2$.

4. Наћи локалне екстремне вредности функције $z(x,y) = -\frac{x}{y} + \frac{1}{8x^2} + 2y^2$.

   Домен функције је $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Парцијални изводи су $z'_x = -\frac{1}{y} - \frac{1}{4x^3}$ и $z'_y = \frac{x}{y^2} + 4y$. Стационарне тачке су решења система $z'_x = z'_y = 0$, тј. $y=-4x^3, x=-4y^3$. Следи да је $y = 4^4y^9$, тј. $1=(2y)^8$. Дакле, $y = \pm\frac{1}{2}$ и $x = \mp\frac{1}{2}$, па имамо две стационарне тачке $M_1(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ и $M_2(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Други парцијални изводи су $z''_{xx} = \frac{3}{4x^4}$, $z''_{xy} = \frac{1}{y^2}$ и $z''_{yy} = 4 - \frac{2x}{y^3}$ па је за обе тачке $A=C=12$, $B=4$ и $\Delta = B^2-4AC = -128 < 0$. Следи да у тачкама M_1 и M_2 дата функција постиже локални минимум, $z_{\min}=2$.

Рада Мутавџић Ђукић