Машински факултет, Београд 18. мај 2021.

Други колоквијум из Анализе - ИТМ

Група 1

1. Израчунати $I_1 = \int x \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}\,\mathrm{d}x$.
2. Израчунати $I_2 = \int_0^{\pi/4} (\cos 2x)^{3/2}\cos x\,\mathrm{d}x$.
3. Израчунати $I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-\sqrt{x})}$.
4. Решити диференцијалну једначину $y' = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Решења.

1. $$I_1 = \begin{bmatrix} u = \operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}, & \mathrm{d}v = x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+2x+1}, & v = x^2/2 \end{bmatrix} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{2x^2+2x+1-2x-1}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \frac{4x+2}{2x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1} - \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\ln(2x^2+2x+1) + C.$$

2. $$I_2 = \int_0^{\pi/4} (1-2\sin^2 x)^{3/2}\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int_0^{1/\sqrt{2}} (1-2t^2)^{3/2}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} \sqrt{2}t = \sin u \\ \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \cos u\,\mathrm{d}u \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^{3/2}\cos u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\cos^4 u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right)^2\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\left(1 + 2\cos 2u + \frac{1+\cos 4u}{2}\right)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{3}{2}u + \sin 2u + \frac{\sin 4u}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16\sqrt{2}}.$$

3. $$I_3 = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2-t)} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t-1)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t-1} - \int \frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t^2+1| - \operatorname{arctg} t + C = \ln\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+1}} - \operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

4. Дата једначина је еквивалентна једначини $x' = \frac{x^2+y^2}{x}$, тј. $x' - x = \frac{y^2}{x}$, што је Бернулијева једначина, $x = x(y)$. Множењем те једначине са x и увођењем смене $x^2 = z$, $2xx' = z'$ сводимо је на линеарну једначину $z' - 2z = 2y^2$. Опште решење је
$$z = e^{\int 2\,\mathrm{d}y}\left(C + \int 2y^2 e^{-\int 2\,\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) = e^{2y}\left(C + \int 2y^2 e^{-2y}\,\mathrm{d}y\right),$$
$$\int 2y^2 e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} u = 2y^2, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 4y\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix} = -y^2 e^{-2y} + \int 2y e^{-2y}\,\mathrm{d}y = \begin{bmatrix} u = 2y, & \mathrm{d}v = e^{-2y}\,\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}y, & v = -e^{-2y}/2 \end{bmatrix}$$
$$= -y^2 e^{-2y} - y e^{-2y} - e^{-2y}/2 + C.$$

Дакле, опште решење је
$$x^2 = Ce^{2y} - \frac{1}{2}\left(2y^2 + 2y + 1\right).$$

Рада Мутавџић Ђукић