

**Градиво за други колоквијум из Математике 1 - смене 2, 4, 6 и 7**

1. Израчунати граничне вредности

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \lim_{x \rightarrow \infty} (x - x^2 \ln(1 + 1/x)), & \text{б)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}, & \text{в)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x}, \\ \text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x} \right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}, & \text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}, & \text{ђ)} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^{3x}, \\ \text{е)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}, & \text{ж)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}, & \text{з)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x^3 - 1}{(x - \sin x)^2}. \end{array}$$

а) Ако искористимо Маклоренов развој за функцију  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  кад  $t \rightarrow 0$  (мало „о“ од  $f(t)$ ) је функција за коју важи  $o(f(t))/f(t) \rightarrow 0$  кад  $t \rightarrow 0$  тј.  $o(f(t))$  је занемарљиво мала у поређењу са  $f(t)$ ) имамо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - x^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x - x + \frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Алтернативно, задатак се може решити применом Лопиталовог правила. Ако уведемо смену  $x = 1/t, t \rightarrow 0$ , дати лимес се своди на

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \stackrel{\text{Л.П.}}{(0/0)} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}.$$

б) Задатак ћемо решити свођењем на познати лимес  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^4} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{2}}{\sin^4 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^4 \frac{x}{2}}{2^4 \left(\frac{x}{2}\right)^4} = \frac{1}{8}.$$

в) Користимо Маклоренове развоје  $\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$  и  $\sin t = t + o(t^2)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^4 x}{x \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)(1 + \cos^2 x)}{x \sin 3x} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2))}{x(3x + o(x^2))} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{г)} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\cos x} \right)^{1/\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \ln \frac{1}{\cos x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\ln \cos x}{\operatorname{tg}^2 x}}.$$

Применом Лопиталовог правила на последњи лимес добијамо

$$e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x / \cos x}{2 \operatorname{tg} x / \cos^2 x}} = \sqrt{e}.$$

$$\text{д)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) + (1+x^2)^{-2}2x}{6x} = \frac{1}{2}.$$

ђ) Користимо познати лимес  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x-2} \right)^{(x-2) \frac{3x}{x-2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x-2}} = e^3.$$

е) Користимо Маклоренове развоје  $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$  и  $\ln(1+t) = t + o(t)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( -\frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) = -\frac{1}{6}.$$

ж) Коришћењем Маклоренових развоја  $\sin x = x + o(x)$  и  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  кад  $x \rightarrow 0$  добијамо

$$\sqrt{1+x \sin x} = \sqrt{1+x^2+o(x^2)} \quad \text{и} \quad \sqrt{\cos x} = \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)}.$$

Затим се може користити Маклоренов развој  $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ :

$$\sqrt{1+x^2+o(x^2)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{и} \quad \sqrt{1-x^2/2+o(x^2)} = 1 - \frac{x^2}{4} + o(x^2).$$

Дакле, полазни лимес је

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{4} + o(x^2)} = \frac{4}{3}.$$

з) На основу Маклоренових развоја  $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$  и  $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  кад  $x \rightarrow 0$ , полазни лимес постаје

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x^6}{2} - 1 + o(x^6)}{\left( x - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2} = 18.$$

2. Написати једначину нормале на криву

$$y = \frac{\sqrt{x-1}}{\ln^2 \sqrt{x-1}}$$

у тачки у којој је  $x = 10$ .

Нека је  $f(x) = \sqrt{x-1}$  и  $g(x) = \ln^2 \sqrt{x-1} = \left(\frac{1}{2} \ln(x-1)\right)^2 = \frac{1}{4} \ln^2(x-1)$ . Тада је  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ ,  $g'(x) = \frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}$ , па је

$$y' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}} \cdot \ln^2 \sqrt{x-1} - \sqrt{x-1} \cdot \frac{\ln(x-1)}{2(x-1)}}{\ln^4 \sqrt{x-1}} = \frac{\ln \sqrt{x-1} - 2}{2\sqrt{x-1} \ln^3 \sqrt{x-1}}.$$

Даље је  $y'(10) = \frac{\ln 3 - 2}{6 \ln^3 3}$ . Приметимо још да је  $y(10) = \frac{3}{\ln^2 3}$ . Заменом ових вредности у једначину нормале  $y - y(10) = -\frac{1}{y'(10)}(x - 10)$  добијамо

$$y - \frac{3}{\ln^2 3} = \frac{6 \ln^3 3}{2 - \ln 3}(x - 10).$$

3. За криву дату параметарски  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$  наћи нагиб (извод) за  $t = 2\pi/3$ .

Овде је  $dx/dt = 1 - \cos t$  и  $dy/dt = \sin t$ , па је  $y'(x) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$ . Даље је  $x(2\pi/3) = 3/2$  и  $y'(3/2) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

4. Наћи нагиб тангенте у тачки  $(2, -1)$  криве  $2y + 5 - x^2 - y^3 = 0$ .

Диференцирањем дате једначине добијамо  $2y' - 2x - 3y^2y' = 0$ , тј.  $y' = \frac{2x}{2-3y^2}$ . За  $x = 2$  и  $y = -1$  добијамо  $y' = -4$ , па је нагиб тангенте у датој тачки  $-4$ .

5. У којим тачкама криве  $xy = (1 - x + y)^2$  су тангенте паралелне  $y$ -оси?

Да би тангенте биле паралелне  $y$ -оси (вертикалне), извод у тим тачкама мора бити бесконачан. Диференцирањем дате једначине налазимо

$$y + xy' = 2(1 - x + y)(-1 + y'), \quad \text{одакле је} \quad y' = \frac{2x - 3y - 2}{3x - 2y - 2}.$$

Ако су тражене тачке облика  $(a, b)$ , мора да важи  $3a - 2b - 2 = 0$  и  $ab = (1 - a + b)^2$ , па решавањем овог система добијамо тачке  $(0, -1)$  и  $(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ .

6. Наћи домен и асимптоте функције

$$\text{а) } y = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}, \quad \text{б) } y = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1.$$

а) Домен функције је  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Видимо да је

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = \pm\infty,$$

па је права  $x = 0$  вертикална асимптота. Даље је

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 1}{2^x - 1} = -1,$$

тј. права  $y = -1$  је хоризонтална асимптота кад  $x \rightarrow -\infty$ . Слично је

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^{-x}}{1 - 2^{-x}} = 1,$$

па је права  $y = 1$  хоризонтална асимптота кад  $x \rightarrow \infty$ .

б) Домен ове функције је  $\frac{x^3}{x+1} \geq 0$ , тј.  $(-\infty, -1) \cup [0, \infty)$ . Права  $x = -1$  је вертикална асимптота, јер је

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 = \infty.$$

Да бисмо одредили понашање функције кад  $x \rightarrow \pm\infty$ , можемо користити Маклоренов полином функције  $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \left( 1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2x - \frac{3}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

па је права  $y = 2x - \frac{3}{2}$  коса асимптота кад  $x \rightarrow \infty$ . Слично,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( -x \sqrt{1 - \frac{1}{x+1}} + x - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -x \left( 1 - \frac{1}{2(x+1)} + o\left(\frac{1}{x+1}\right) \right) + x - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{2} + o(1) \right), \end{aligned}$$

па је права  $y = -\frac{1}{2}$  хоризонтална асимптота кад  $x \rightarrow -\infty$ .

7. Испитати ток и скицирати график функције  $f(x) = \ln \frac{x-1}{x-2}$ .

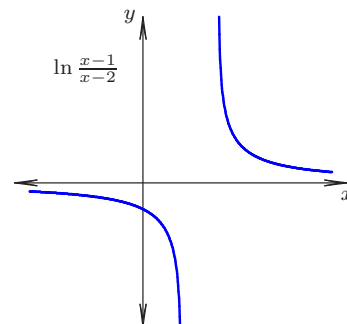
Домен функције је  $\frac{x-1}{x-2} > 0$ , тј.  $x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$ . Даље је  $f(x) \geq 0$  за  $\frac{x-1}{x-2} \geq 1$ , тј. за  $\frac{1}{x-2} \geq 0$ .

Следи да  $f(x)$  нема нула, негативна је за  $x < 1$  и позитивна за  $x > 2$ .

Функција има вертикалну асимптоту за  $x = 1$  (са леве стране) и за  $x = 2$  (са десне стране), јер је  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -\infty$  и  $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \infty$ . Права  $x = 0$  је хоризонтална асимптота, јер је  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ .

Први извод је  $f'(x) = -1/(x^2 - 3x + 2)$ , па функција нема екстремних вредности и опада на домену.

Други извод је  $f''(x) = (2x - 3)/((x - 1)^2(x - 2)^2)$ , па функција нема превојних тачака ( $x = 3/2$  је ван домена), конкавна је за  $x < 1$  и конвексна за  $x > 2$ .

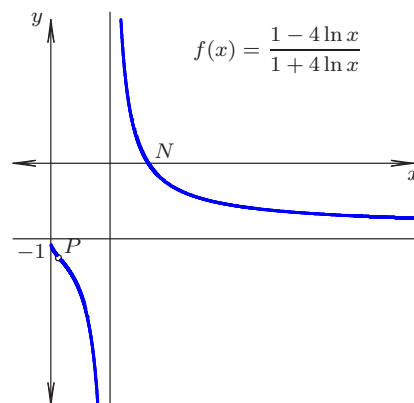


8. Испитати ток и скицирати график функције  $f(x) = \frac{1 - 4 \ln x}{1 + 4 \ln x}$ .

Домен функције је  $(0, e^{-1/4}) \cup (e^{-1/4}, \infty)$ ,  $e^{-1/4} \approx 0.8$ . Нула функције је  $N(e^{1/4}, 0)$ ,  $e^{1/4} \approx 1.3$ . Функција је негативна за  $x \in (0, e^{-1/4}) \cup (e^{1/4}, \infty)$ , а позитивна за  $x \in (e^{-1/4}, e^{1/4})$ . Вертикална асимптота је права  $x = e^{1/4}$ , а  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1$ . Хоризонтална асимптота кад  $x \rightarrow \infty$  је права  $y = -1$ . Изводи функције су

$$f'(x) = -\frac{8}{x(1 + 4 \ln x)^2}, \quad f''(x) = \frac{8(9 + 4 \ln x)}{x^2(1 + 4 \ln x)^3}.$$

Како је први извод негативан на домену, закључујемо да функција  $f(x)$  свуда опада. Други извод је нула за  $x = e^{-9/4} \approx 0.1$  и тада функција има превојну тачку  $P$ , позитиван за  $x \in (0, e^{-9/4}) \cup (e^{-1/4}, \infty)$  и ту је функција конвексна, а негативан за  $x \in (e^{-9/4}, e^{-1/4})$  и ту је функција конкавна.



9. Испитати ток и скицирати график функције  $y = \frac{\sqrt{x+2}}{\ln^2(x+2)}$ .

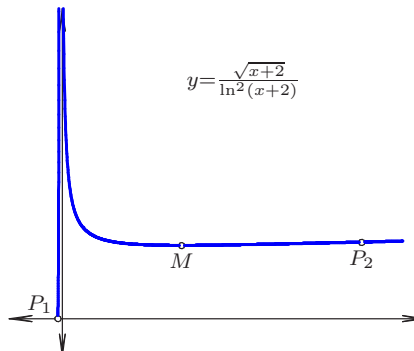
Домен функције је  $(-2, -1) \cup (-1, \infty)$ . Права  $x = -1$  је вертикална асимптота и функција нема других асимптота, јер је

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Изводи функције су

$$f'(x) = \frac{\ln(x+2) - 4}{2\sqrt{x+2} \ln^3(x+2)}, \quad f''(x) = \frac{24 - \ln^2(x+2)}{4\sqrt{(x+2)^3} \ln^4(x+2)}.$$

Први извод је позитиван за  $x \in (-2, -1) \cup (e^4 - 2, \infty)$  и ту функција расте, негативан за  $x \in (-1, e^4 - 2)$  и ту функција опада, а тачка  $M(e^4 - 2, e^2/16)$  је локални минимум функције,  $e^4 - 2 \approx 52.6$ ,  $e^2/16 \approx 0.5$ . Други извод је негативан за  $x \in (-2, e^{-2\sqrt{6}} - 2) \cup (e^{2\sqrt{6}} - 2, \infty)$  и ту је функција конкавна, а позитиван за  $x \in (e^{-2\sqrt{6}} - 2, -1) \cup (-1, e^{2\sqrt{6}} - 2)$  и ту је функција конвексна. За  $x = e^{-2\sqrt{6}} - 2 \approx -1.993$  и  $x = e^{2\sqrt{6}} - 2 \approx 132$  функција има превојне тачке  $P_1$  и  $P_2$  редом.



10. Испитати ток и скицирати график функције  $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$ .

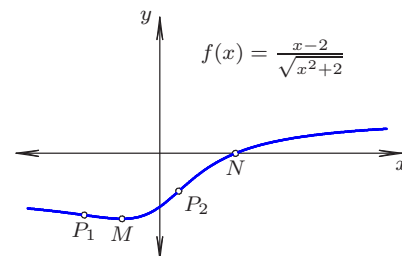
Домен функције  $f(x)$  је цео скуп  $\mathbb{R}$ , јер је  $x^2+2 > 0$  за свако  $x \in \mathbb{R}$ ; једина нула је тачка  $N(2, 0)$ . Да бисмо проверили да ли дата функција има асимптоте, посматрамо лимес

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2}{|x|\sqrt{1+2/x^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-2/x}{\operatorname{sgn} x \sqrt{1+2/x^2}} = \pm 1,$$

па  $f(x)$  има хоризонталу асимптоту  $y = 1$  кад  $x \rightarrow \infty$ , односно  $y = -1$  кад  $x \rightarrow -\infty$ .

Први извод је  $f' = \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^{3/2}}$ , па је  $f' < 0$  за  $x < -1$  и ту функција опада,  $f' > 0$  за  $x > -1$  и ту функција расте, а тачка  $M(-1, -\sqrt{3})$  локални минимум функције.

Други извод је  $f'' = \frac{-4x^2-6x+4}{(x^2+2)^{5/2}} = -\frac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+2)^{5/2}}$ . Дакле,  $f'' < 0$  за  $x \in (-\infty, -2) \cup (1/2, \infty)$  и ту је функција конкавна,  $f'' > 0$  за  $x \in (-2, 1/2)$  и ту је функција конвексна; превојне тачке су  $P_1(-2, -2\sqrt{2/3})$  и  $P_2(1/2, -1)$ .



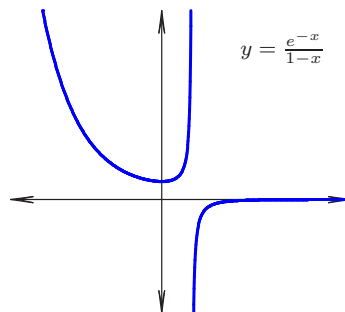
11. Испитати ток и скицирати график функције  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ .

Домен функције је  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ;  $f > 0$  за  $x < 1$  и  $f < 0$  за  $x > 1$ . Функција нема нула, није ни парна ни непара. Права  $x = 1$  је вертикална асимптота, јер је  $\lim_{x \rightarrow 1\pm} f(x) = \mp\infty$ .

Даље је  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ , па је права  $y = 0$  хоризонтална асимптота кад  $x \rightarrow \infty$ .

Први извод је  $f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$ , па функција опада за  $x < 0$ , расте за  $x \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  и има минимум у тачки  $M(0, 1)$ .

Други извод је  $f''(x) = \frac{e^{-x}(x^2+1)}{(1-x)^3}$ , па је функција конвексна за  $x < 1$  и конкавна за  $x > 1$ .



12. Испитати ток и скицирати график функције  $y = (2x-1)e^{-1/x}$ .

Домен функције је  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , нула функције је  $N(1/2, 0)$ ,  $y < 0$  за  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/2)$  и  $f(x) > 0$  за  $x \in (1/2, \infty)$ . Права  $x = 0$  је вертикална асимптота са леве стране, јер је

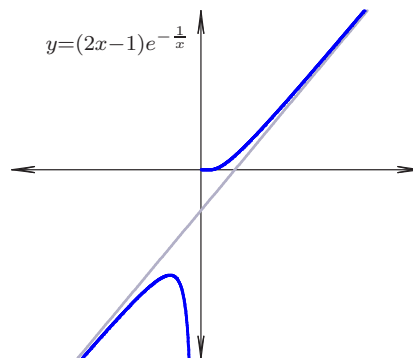
$$\lim_{x \rightarrow 0+} y(x) = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow 0-} y(x) = -\infty.$$

Кад  $x \rightarrow \pm\infty$  можемо користити Маколренов развој  $e^t = 1 + t + o(t)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x-1)e^{-1/x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x-1) \left( 1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x-3+o(1)),$$

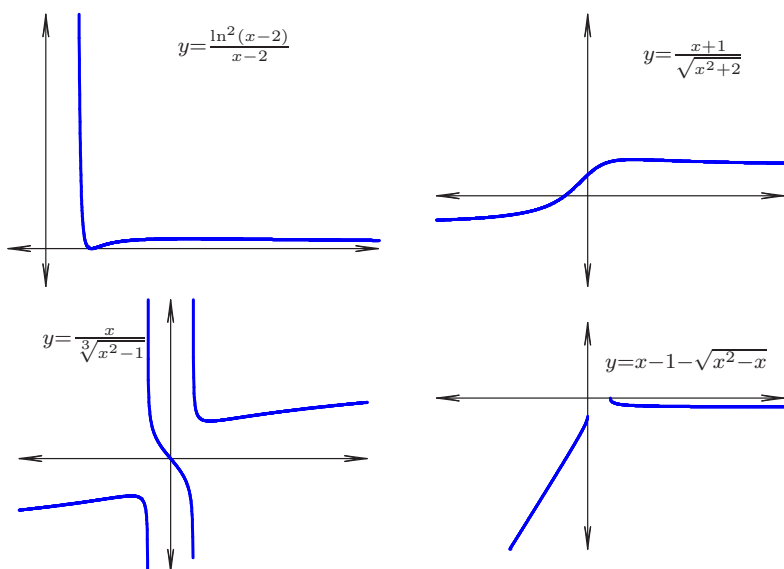
па је права  $y = 2x-3$  коса асимптота кад  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Даље је  $y'(x) = e^{-1/x} \frac{2x^2+2x-1}{x^2}$ , па  $y \nearrow$  за  $x \in (-\infty, -(1+\sqrt{3})/2) \cup ((\sqrt{3}-1)/2, \infty)$  и  $y \searrow$  за  $x \in (-(1+\sqrt{3})/2, 0) \cup (0, (\sqrt{3}-1)/2)$ . Тачка  $(-(1+\sqrt{3})/2, y(-(1+\sqrt{3})/2))$  је локални максимум функције, а тачка  $((\sqrt{3}-1)/2, y((\sqrt{3}-1)/2))$  је локални минимум функције. Други извод је  $y'' = e^{-1/x} \frac{4x-1}{x^4}$ , па је  $y$  конкавна за  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1/4)$  и конвексна за  $x \in (1/4, \infty)$ . Функција има превој у тачки  $(1/4, y(1/4))$ .



13. Испитати ток и скицирати график функције

$$\text{а) } y = \frac{\ln^2(x-2)}{x-2}, \quad \text{в) } y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}, \quad \text{г) } y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}, \quad \text{д) } y = x-1-\sqrt{x^2-x}.$$



14. Апроксимирати функцију  $\ln(1+x-x^2)$  Маклореновим полиномом четвртог степена.

Користимо познати развој  $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$  кад  $t \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}\ln(1+x-x^2) &= x - x^2 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{3} - \frac{(x-x^2)^4}{4} + o((x-x^2)^4) \\ &= x - x^2 - \frac{1}{2}(x^2 - 2x^3 + x^4) + \frac{1}{3}(x^3 - 3x^4) - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{7}{4}x^4 + o(x^4).\end{aligned}$$

15. Развити у Маклоренов полином петог степена функцију  $\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$ .

На основу формуле  $x^5 - 1 = (x-1)(1+x^2+x^3+x^4)$  је  $\ln(1+x^2+x^3+x^4) = \ln(1-x^5) - \ln(1-x)$ . Сада користимо Маклорнов полином  $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} + o(x^5)$  кад  $x \rightarrow 0$ , па је тражени полином

$$T_5(x) = -x^5 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^5}{5}.$$

16. Апроксимирати функцију

$$y = (x^2 - 1)e^{-2x}$$

Маклореновим полиномом четвртог степена и проценити грешку апроксимације на интервалу  $[0, 1]$ .

Првих пет извода су  $y'(x) = -2e^{-2x}(x^2 - x - 1)$ ,  $y''(x) = 2e^{-2x}(2x^2 - 4x - 1)$ ,  $y'''(x) = -4e^{-2x}(2x^2 - 6x + 1)$ ,  $y^{(4)}(x) = 16e^{-2x}(x^2 - 4x + 2)$  и  $y^{(5)}(x) = -32e^{-2x}(x^2 - 5x + 4)$ . Даље је  $y(0) = -1$ ,  $y'(0) = 2$ ,  $y''(0) = -2$ ,  $y'''(0) = -4$  и  $y^{(4)}(0) = 32$ , па је Маклоренов полином четвртог степена

$$T_4(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4, \quad \text{тј.} \quad T_4(x) = -1 + 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^4.$$

Грешка апроксимације је

$$R_4(x) = \frac{y^{(5)}(t)}{5!}x^5, \quad \text{за } t \in (0, x), \quad \text{при чему је } x \in [0, 1].$$

За оцену грешке, нађимо максимум функције  $|y^{(5)}(t)|$  за  $t \in (0, 1)$ :

$$\max_{t \in (0, 1)} |-32e^{-2t}(t^2 - 5t + 4)| < 32e^0 \cdot 4 = 128, \quad \text{па је } |R_4(1)| < \frac{16}{15} \quad \text{за } x \in [0, 1].$$

17. Апроксимирати функцију

$$y = \sqrt[5]{2x-1}$$

Тејлоровим полиномом степена 3 у околини тачке  $a = 1$ . Користећи овај полином приближно израчунати  $\sqrt[5]{1,1}$  и проценити грешку.

Прва четири извода су  $y'(x) = \frac{2}{5}(2x-1)^{-4/5}$ ,  $y''(x) = -\frac{16}{25}(2x-1)^{-9/5}$ ,  $y'''(x) = \frac{288}{125}(2x-1)^{-14/5}$  и  $y^{(4)}(x) = -8064/625(2x-1)^{-19/5}$ . Тејлоров полином трећег степена у тачки  $a = 1$  је

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3, \quad \text{тј.}$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{2}{5}(x-1) - \frac{8}{25}(x-1)^2 + \frac{48}{125}(x-1)^3.$$

Даље је  $y(1,1) \approx T_3(1,1) = 1,037184$ . За  $1 < t < 1,1$  је  $(2t-1)^{-19/5} < 1$ , па је

$$|R_3(1,1)| < \frac{1}{4!} \frac{8064}{625} \cdot 0,1^4 \approx 5,4 \cdot 10^{-5}.$$

18. Одредити Маклоренов полином другог степена за функцију  $y = y(x)$  дату једначином  $x + y = \arctg(xy)$ .

Прво приметимо да је  $y = 0$  за  $x = 0$ . Диференцирањем дате једначине (по  $x$ ) добијамо

$$1 + y' = \frac{y + xy'}{1 + (xy)^2},$$

одакле за  $x = y = 0$  добијамо  $y'(0) = -1$ . Даљим диференцирањем добијамо

$$y'' = \frac{(y' + y' + xy'')(1 + (xy)^2) - (y + xy')2xy(y + xy')}{(1 + (xy)^2)^2},$$

одакле за  $x = y = 0$  и  $y'(0) = -1$  добијамо  $y''(0) = -2$ . Тражени Маклоренов полином је  $T_2(x) = -x - x^2$ .

Рада Мутавцић Ђукић