Машински факултет, Београд 24. мај 2021.

Анализа - јун 2021. (ИТМ)

Група 1

1. Израчунати граничну вредност $L=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x^3-1}{(x-\sin x)^2}$.

2. Испитати ток и скицирати график функције $f(x)=\ln\frac{x-1}{x-2}$.

3. Одредити локалне екстремне вредности функције $f(x,y)=e^{x^3-3xy-y^3}$.

4. Израчунати $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

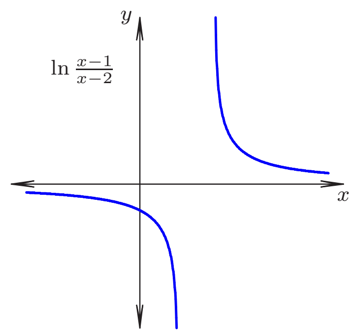
5. Израчунати $\displaystyle\int_0^\infty x^{10}e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Решења.

1. На основу Маклоренових развоја $\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ и $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$ кад $x\to 0$ је

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x^6}{2}-1+o(x^6)}{\left(x-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)^2}=18.$$

2. Домен функције је $\frac{x-1}{x-2}>0$, тј. $x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$. Даље је $f(x)\geqslant 0$ за $\frac{x-1}{x-2}\geqslant 1$, тј. за $\frac{1}{x-2}\geqslant 0$.



Следи да $f(x)$ нема нула, негативна је за $x<1$ и позитивна за $x>2$.

Функција има вертикалну асимптоту за $x=1$ (са леве стране) и за $x=2$ (са десне стране), јер је $\lim_{x\to 1-}f(x)=-\infty$ и $\lim_{x\to 2+}f(x)=\infty$. Права $x=0$ је хоризонтална асимптота, јер је $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\ln 1=0$.

Први извод је $f'(x)=-1/(x^2-3x+2)$, па функција нема екстремних вредности и опада на домену.

Други извод је $f''(x)=(2x-3)/((x-1)^2(x-2)^2)$, па функција нема превојних тачака ($x=3/2$ је ван домена), конкавна је за $x<1$ и конвексна за $x>2$.

3. Довољно је наћи екстремуме функције $g(x,y)=x^3-3xy-y^3$ (јер је e^x растућа функција). Парцијални изводи су $g'_x=3x^2-3y$, $g'_y=-3x-3y^2$, $g''_{xx}=6x$, $g''_{xy}=-3$ и $g''_{yy}=-6y$. Стационарне тачке су $M_1(0,0)$ и $M_2(-1,1)$. За тачку M_1 је $A=g''_{xx}=0$, $B=g''_{xy}=-3$, $C=g''_{yy}=0$ и $\Delta=9>0$, па тачка M_1 није тачка локалне екстремне вредности. За тачку M_2 је $A=-6$, $B=-3$, $C=-6$ и $\Delta=-27$, па је M_2 тачка локалног максимума функције, $f(-1,1)=e$.

4. $$I=\begin{bmatrix}x=t^2\\ \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t\end{bmatrix}=\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)\sqrt{t^2+t}}=\begin{bmatrix}\sqrt{t^2+t}=tu,\ t=\dfrac{1}{u^2-1}\\ \mathrm{d}t=-2u/(u^2-1)^2\,\mathrm{d}u\end{bmatrix}=-4\int\frac{\mathrm{d}u}{2u^2-u^4}=-2\int\frac{2-u^2+u^2}{u^2(2-u^2)}\,\mathrm{d}u$$
$$=-2\int\frac{\mathrm{d}u}{u^2}-2\int\frac{\mathrm{d}u}{2-u^2}=\frac{2}{u}+\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt2-u}{\sqrt2+u}\right|+C=2\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}+\frac{1}{\sqrt2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right|+C.$$

5. Полазећи од интеграла

$$I_n=\int_0^\infty x^ne^{-x}\,\mathrm{d}x=\begin{bmatrix}u=x^n, & \mathrm{d}v=e^{-x}\,\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u=nx^{n-1}\,\mathrm{d}x, & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=\lim_{b\to\infty}\left(-x^ne^{-x}\Big|_0^b\right)+nI_{n-1}=nI_{n-1},$$

при чему је $I_0=1$, добијамо да је $I_n=n!$. Дакле, $I_{10}=10!$.

Интеграл I_n дефинише *Гама функцију*, која представља продужење факторијел функције.

Рада Мутавџић Ђукић