Машински факултет, Београд 16. јун 2021.

Анализа - јул 2021. (ИТМ)

Група 1

1. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+2}}$.

2. Развити у Маклоренов полином петог степена функцију $\ln(1+x+x^2+x^3+x^4)$.

3. Доказати да функција $z = e^x f\left(xe^{\frac{y^2}{2x^2}}\right)$ задовољава једначину $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y^2-x^2)\dfrac{\partial z}{\partial y} = xyz$.

4. Израчунати $I = \displaystyle\int \frac{\sin x - \cos x}{1+2\sin x}\,\mathrm{d}x$. 5. Решити диференцијалну једначину $y'\sin x - y\cos x + 1 = 0$.

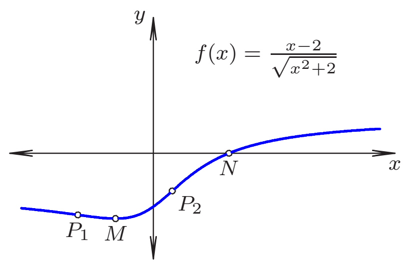
Решења.

1. Домен функције $f(x)$ је цео скуп $\mathbb{R}$, јер је $x^2+2>0$ за свако $x\in\mathbb{R}$; једина нула је тачка $N(2,0)$. Да бисмо проверили да ли дата функција има асимптоте, посматрамо лимес

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2}{|x|\sqrt{1+2/x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-2/x}{\operatorname{sgn} x\sqrt{1+2/x^2}} = \pm 1,$$

па $f(x)$ има хоризонталу асимптоту $y=1$ кад $x\to\infty$, односно $y=-1$ кад $x\to-\infty$.

Први извод је $f' = \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2)^{3/2}}$, па је $f'<0$ за $x<-1$ и ту функција опада, $f'>0$ за $x>-1$ и ту функција расте, а тачка $M(-1,-\sqrt{3})$ локални минимум функције.



Други извод је $f'' = \dfrac{-4x^2-6x+4}{(x^2+2)^{5/2}} = -\dfrac{2(x+2)(2x-1)}{(x^2+2)^{5/2}}$. Дакле, $f''<0$ за $x\in(-\infty,-2)\cup(1/2,\infty)$ и ту је функција конкавна, $f''>0$ за $x\in(-2,1/2)$ и ту је функција конвексна; превојне тачке су $P_1(-2,-2\sqrt{2/3})$ и $P_2(1/2,-1)$.

2. На основу формуле $x^5-1=(x-1)(1+x^2+x^3+x^4)$ је $\ln(1+x^2+x^3+x^4) = \ln(1-x^5)-\ln(1-x)$. Сада користимо Маклорнов полином $\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+o(x^5)$ кад $x\to 0$, па је тражени полином

$$T_5(x) = -x^5+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{4x^5}{5}.$$

3. Нека је $t = xe^{\frac{y^2}{2x^2}}$. Тада је

$$z'_x = e^x f(t) + e^x f'(t)\left(e^{\frac{y^2}{2x^2}} + xe^{\frac{y^2}{2x^2}}\left(-\frac{y^2}{x^3}\right)\right) = e^x f(t) + \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t)$$

$$z'_y = e^x f'(t)\cdot xe^{\frac{y^2}{2x^2}}\frac{2y}{2x^2} = \frac{y}{x}e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t).$$

Дакле,

$$xyz'_x + (y^2-x^2)z'_y = xye^x f(t) + xy\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)\cdot e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t) + (y^2-x^2)\frac{y}{x}e^x e^{\frac{y^2}{2x^2}} f'(t) = xyz.$$

4. $$I = \begin{bmatrix} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t,\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \mathrm{d}x = \dfrac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \end{bmatrix} = \int \frac{2(2t-1+t^2)}{(1+t^2+4t)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t,$$

$$\frac{4t-2+2t^2}{(1+t^2+4t)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{1+4t+t^2} \Rightarrow A=B=1,\ C=-1,\ D=-3,$$

$$I = \int\frac{t+1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t - \int\frac{t+3}{(t+2)^2-3}\,\mathrm{d}t = \begin{bmatrix} t+2=u, \\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \ln\sqrt{t^2+1} + \operatorname{arctg} t - \int\frac{u+1}{u^2-3}\,\mathrm{d}u,$$

$$\frac{u+1}{u^2-3} = \frac{A}{u-\sqrt{3}} + \frac{B}{u+\sqrt{3}} \Rightarrow A = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, B = \frac{3-\sqrt{3}}{6},$$

$$I = \ln\sqrt{t^2+1} + \operatorname{arctg} t - \frac{3+\sqrt{3}}{6}\ln|t+2-\sqrt{3}| + \frac{\sqrt{3}-3}{6}\ln|t+2+\sqrt{3}| + C,\ t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

5. Очигледно је у питању линеарна диференцијална једначина, $y' - (\operatorname{ctg} x)y = -1/\sin x$. Прво налазимо $\int \operatorname{ctg} x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$, па је опште решење дате једначине

$$y = e^{\ln \sin x}\left(C - \int \frac{1}{\sin x} e^{-\ln \sin x}\,\mathrm{d}x\right) = \sin x \left(C - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}\right) = \sin x\,(C + \operatorname{ctg} x) = C \sin x + \cos x.$$

Рада Мутавџић Ђукић