Машински факултет, Београд 27. јун 2022.

Писмени део испита из Анализе - ИТМ

Група 1

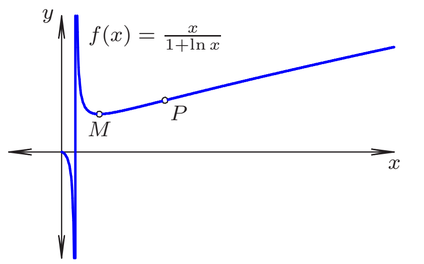
1. Испитати ток и скицирати график функције $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$.
2. Наћи Тејлоров полином другог степена за функцију $y(x) = x^x - 1$ у околини тачке $a = 1$. На основу добијеног развоја приближно израчунати $y(1.1)$.
3. Наћи први и други диференцијал функције $z(x,y) = \dfrac{3x^2+2y^2}{e^{x^2+y^2}}$ у тачки $M(-1,0)$.
4. Израчунати $\displaystyle\int \frac{\ln(x^2+2)}{x^4}\,\mathrm{d}x$.
5. Наћи површину фигуре омеђене кривом $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и правама $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ и $y = 0$.

Решења.

1. Домен дате функције је $D = (0, \frac{1}{e}) \cup (\frac{1}{e}, \infty)$. Даље, ова функција нема нула, а знак јој је исти као знак имениоца $1 + \ln x$ (јер је $x > 0$ на домену). Дакле, $f > 0$ за $x \in (\frac{1}{e}, \infty)$ и $f < 0$ за $x \in (0, \frac{1}{e})$. Погледајмо лимесе у крајевима области дефинисаности:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to \frac{1}{e}\pm} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

Дакле, функција има (само) вертикалну асимптоту $x = \frac{1}{e}$.



Изводи дате функције су

$$f'(x) = \frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}, \quad f''(x) = -\frac{\ln x - 1}{x(\ln x + 1)^3}.$$

Следи да је тачка $M(1,1)$ локални минимум функције f (пре тога на домену опада а после расте). Превојна тачка је $P(e, \frac{e}{2})$; функција је конкавна за $x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, \infty)$ и конвексна за $x \in (\frac{1}{e}, e)$.

2. Запишимо дату функцију у облику $y(x) = e^{x\ln x} - 1$ да бисмо нашли њене изводе:

$$y'(x) = x^x(\ln x + 1), \quad y''(x) = x^x\left(\frac{1}{x} + (\ln x + 1)^2\right),$$

па је $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ и $y''(1) = 2$. Тражени Тејлоров полином је

$$T_2(x) = x - 1 + (x-1)^2, \quad T_2(1.1) = 0.11.$$

3. Овде је

$$z'_x = -2xe^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2-3), \quad z'_y = -2ye^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2-2),$$
$$z''_{xx} = e^{-x^2-y^2}(12x^4+8x^2y^2-30x^2-4y^2+6), \quad z''_{xy} = 4xye^{-x^2-y^2}(3x^2+2y^2-5),$$
$$z''_{yy} = e^{-x^2-y^2}(8y^4+12x^2y^2-6x^2-20y^2+4).$$

У тачки $M(-1,0)$ је $z'_x = z'_y = z''_{xy} = 0$, $z''_{xx} = -12/e$ и $z''_{yy} = -2/e$, па је

$$dz(M) = 0, \quad d^2z(M) = -\frac{6dx^2 + dy^2}{e}.$$

4. Користимо парцијалну интеграцију: $u = \ln(x^2+2)$, $\mathrm{d}u = \frac{2x}{x^2+2}$, $\mathrm{d}v = x^{-4}\,\mathrm{d}x$, $v = -x^{-3}/3$, па је полазни интеграл

$$I = -\frac{\ln(x^2+2)}{3x^3} + \frac{1}{3}\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2(x^2+2)}.$$

Додавањем и одузимањем x^2 у последњем интегралу добијамо

$$\int \frac{2 + x^2 - x^2\,\mathrm{d}x}{x^2(x^2+2)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C,$$

па је

$$I = -\frac{\ln(x^2+2)}{3x^3} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

5. Тражена површина једнака је интегралу

$$\int_{1/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x,$$

који се сменом $x = \sin t$ своди на

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Први интеграл на десној страни претходне једнакости се множењем и дељењем са $\sin t$ своди на

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}$$

који се даље сменом $\cos t = u$ своди на

$$\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\Bigg|_{0}^{\sqrt{3}/2} = \ln(2+\sqrt{3}).$$

Дакле,

$$I = \ln(2+\sqrt{3}) + \cos t\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ценићу ако ми евентуалне грешке пријавите на: rmutavdzic@mas.bg.ac.rs.