

Rešenja zadataka sa pismenog dela ispita iz predmeta Matematika 1, oktobar 2015. godine

Detaljnije su rešeni zadaci za 1. grupu.

1. Sistem najlakše rešavamo najobičnijom eliminacijom: ako iz prve jednačine izrazimo

$$y = \frac{1 - kx}{3}$$

i to uvrstimo u drugu, imamo

$$x + (k - 1)\frac{1 - kx}{3} = 4, \quad (3 + k - k^2)x = 13 - k, \quad x = \frac{13 - k}{3 + k - k^2}$$

(usput je neophodno prokomentarisati kako ova jednačina po x nema rešenja za $3 + k - k^2 = 0$, odnosno $k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ s obzirom na to da je tada $13 - k \neq 0$) i onda

$$y = \frac{1 - kx}{3} = \frac{3 - 12k}{3(3 + k - k^2)} = \frac{1 - 4k}{3 + k - k^2}$$

Dati sistem se sastoji od 3 jednačine u 2 nepoznate, tj. ima više jednačina nego nepoznatih. Kako je sistem od 2 nepoznate u opštem slučaju određen dvema jednačinama, sistem poput ovog može biti salglasan samo ako treća jednačina uklapa prve dve, tj. ako je vrednost k takva da se dobijena rešenja po x i y upalaju u 3. jednačinu:

$$2\frac{13 - k}{3 + k - k^2} - \frac{1 - 4k}{3 + k - k^2} = 5$$
$$\frac{25 + 2k}{3 + k - k^2} = 5, \quad 5k^2 - 3k + 10 = 0.$$

Dobijena kvadratna jednačina po k nema rešenja ($D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 10 < 0$), dakle realan parametar k sa traženim svojstvom ne postoji.

U 2. grupi su samo zamenjena mesta 2. i 3. jednačini i k je zamenjeno sa $k + 1$. Odgovor je, naravno, isti - takvo k ne postoji.

2. Prava određena tačkom $P(1, 2, -1)$ i vektorom $\vec{p} = (0, -3, 2)$ odnosno $\Pi = \langle P, \vec{p} \rangle$ ima parametarski oblik:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 - 3t \\ z &= -1 + 2t \end{aligned}$$

a)

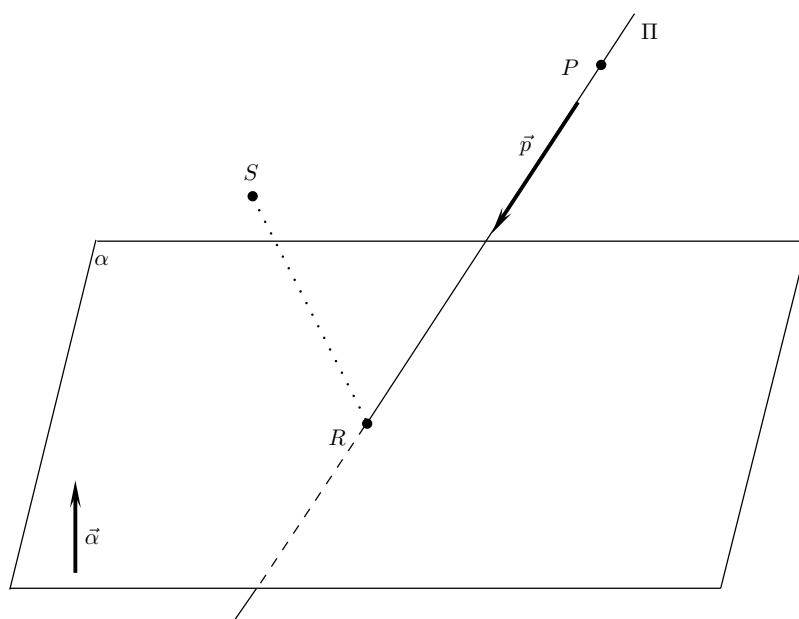
Kako je vektor normale date ravni $\vec{\alpha} = (5, -1, -2)$, iz $\vec{\alpha} \cdot \vec{p} = -1 \neq 0$, zaključujemo da postoji presek:

$$\alpha \cap \Pi = \{R\} \Rightarrow 5(1) - (2 - 3t) - 2(-1 + 2t) = 2 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow R(1, -7, 5)$$

Rastojanje se nalazi poznatom formulom:

$$SR = \sqrt{(1-0)^2 + (-7+2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{42}$$

Slika koja sledi pokazuje odnos između tačaka i ravni, uz napomenu da tačka S ne pripada ravni α što se vidi unošenjem koordinata tačke S u jednačinu ravni α . b)



Slika 1: Rastojanje između tačaka R i S .

Tačka S ne pripada pravoj p , jer joj prva koordinata nije 0. Jednačinu ravni β jednostavno dobijamo jer $\beta = \langle S, \vec{\beta} \rangle$, gde je $\vec{\beta} = \vec{p} \times \vec{SR}$. Kako je $\vec{SR} = (1, -5, 4)$ sledi:

$$\vec{\beta} = \vec{p} \times \vec{SR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (-2, 2, 3)$$

Jednačina ravni β jednaka je:

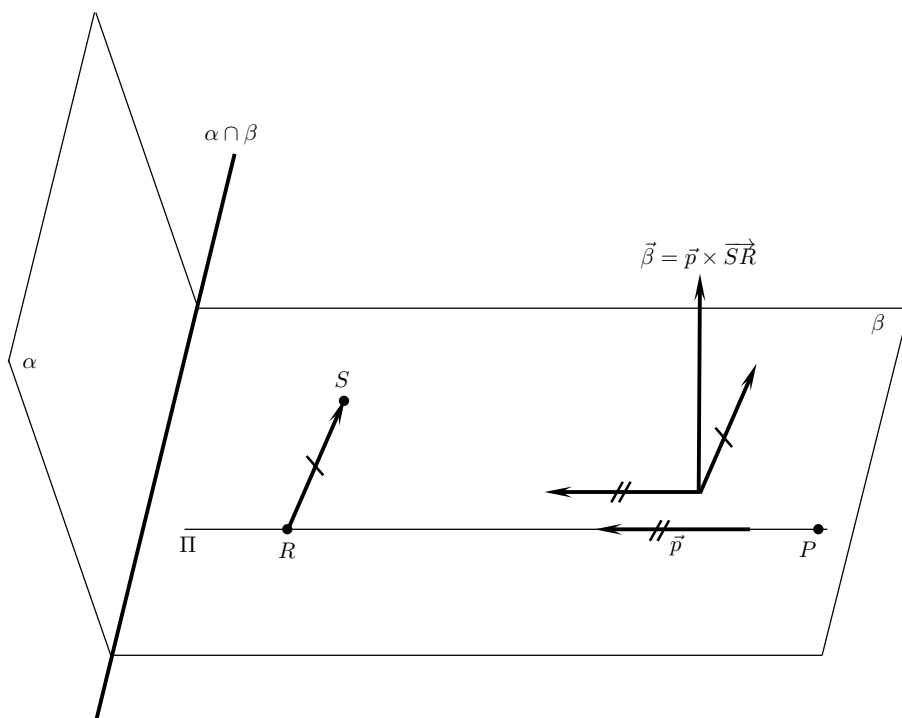
$$-2(x-0) + 2(y+2) + 3(z-1) = 0 \Rightarrow -2x + 2y + 3z + 1 = 0$$

Ravni α i β se seku jer im vektori nisu kolinearni.

$$\begin{array}{rcl} 5x & - & y - 2z = 2 \\ -2x & + & 2y + 3z = -1 \end{array} \Rightarrow 8x - z = 3$$

Ako je $x = t$ sledi da je $z = -3 + 8t$ i $y = 4 - 11t$, odnosno presečna prava ima jednačinu:

$$\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 4 - 11t \\ z & = & -3 + 8t \end{array} \Rightarrow \frac{x-0}{1} = \frac{y-4}{-11} = \frac{z+3}{8}$$



Slika 2: Presečna prava je dobijena rešavanjem sistema čije su jednačine jednačine ravni α i β .

U 2. grupi su samo zamenjena mesta x i z -koordinatama.

3. Domen date funkcije predstavljaju oni i samo oni realni brojevi x za koje je $x^3(1-x^3) > 0$, $0 < x^3 < 1$, odnosno $x \in (0, 1)$.

Nule funkcija bi bili oni realni brojevi x za koje je $x^3(1-x^3) > 1$, odnosno nakon smene $t = x^3$: $t(1-t) = 1$, $t^2 - t + 1 = 0$, što predstavlja kvadratnu jednačinu bez realnih rešenja, pa stoga data funkcija nema nula. Kako se za sve x iz domena vrednost $x^3(1-x^3)$ nalazi izmedju 0 i 1 (proizvod dva realna broja koji pripadaju intervalu $(0, 1)$), to je vrednost date funkcije, kao logaritam potonjeg izraza, uvek strogo manja od 0.

S obzirom na to da je domen ograničen interval brojevine prave, funkcija nema ni horizontalnih ni kosih asimptota. Kandidati za eventualne vertikalne asimptote su krajevi domena.

0 i 1. Kako je

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^3 (1 - x^3) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^3 (1 - x^3) = 0,$$

pri čemu u oba slučaja dati izraz teži nuli s desne strane, to je

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(x^3 (1 - x^3)) = \lim_{x \rightarrow 1-} \ln(x^3 (1 - x^3)) = \lim_{t \rightarrow 0+} \ln t = -\infty,$$

funkcija ima dve vertikalne asimptote - pravu $x = 0$ i pravu $x = 1$.

Prvi izvod jednak je

$$f'(x) = \frac{1}{x^3 (1 - x^3)} [x^3 (1 - x^3)]' = \frac{1}{x^3 (1 - x^3)} (3x^2 - 6x^5) = \frac{3(1 - 2x^3)}{x(1 - x^3)}.$$

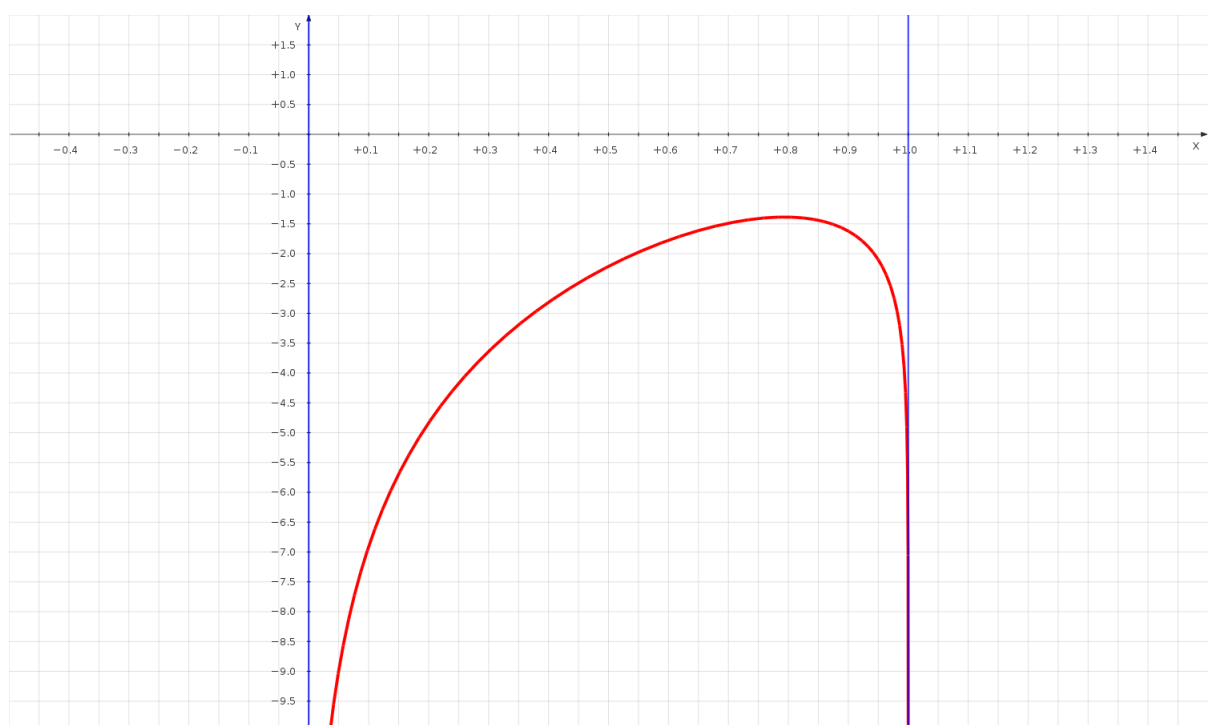
S obzirom na domen, izraz $f'(x)$ je negativan/jednak 0/pozitivan onda i samo onda kada je izraz $1 - 2x^3$ negativan/jednak 0/pozitivan, odnosno onda i samo onda kada je izraz $2x^3$ veći od 1/jednak 1/manji od 1. Drugim rečima

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \quad f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 1\right)$$

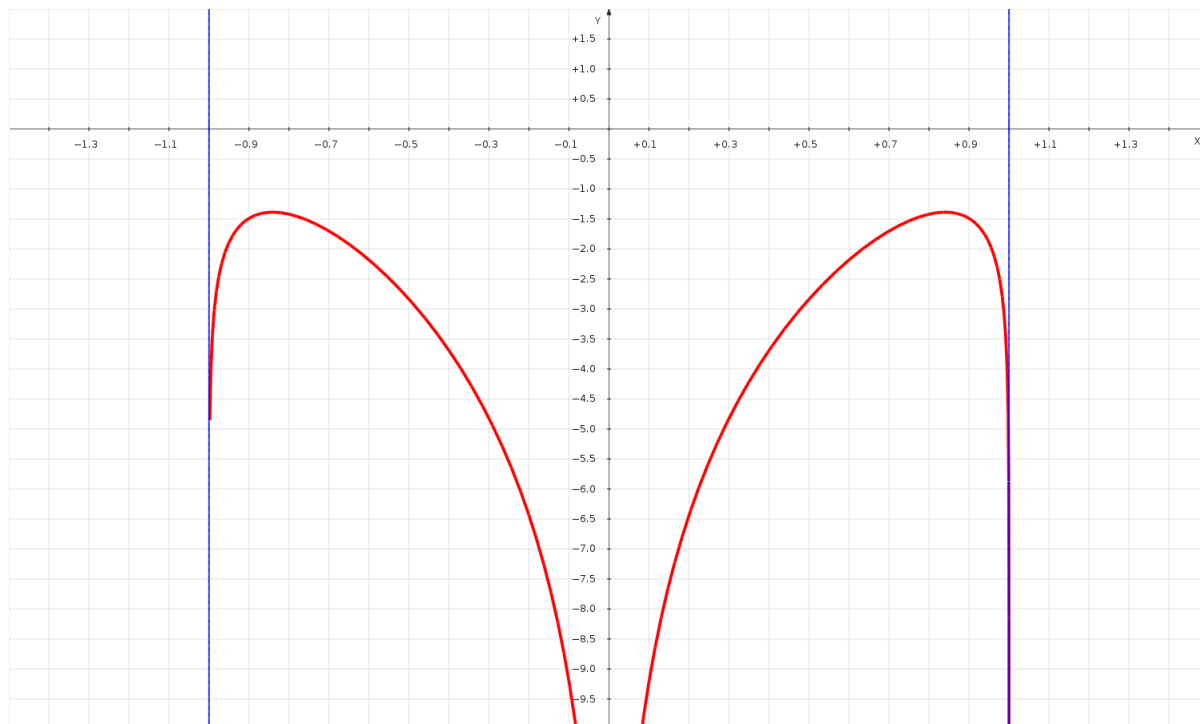
što znači da se u $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ dostiže lokalni maksimum (jasno je da ova vrednost jeste u domenu). Drugi izvod,

$$f''(x) = \frac{3(-6x^2)(x - x^4) - 3(1 - 2x^3)(1 - 4x^3)}{x^2(1 - x^3)^2} = \frac{-1 - 2x^6}{x^2(1 - x^3)^2},$$

je, s obzirom na domen, uvek negativan. Dakle, funkcija $f''(x)$ je uvek konkavna i nema prevoja.



U 2. grupi analiza teče potpuno analogno, pri čemu je jedina razlika u tome što su domen, a onda i grafik funkcije, simetrični u odnosu na nulu, tj. u odnosu na x -osu i odgovarajuća funkcija je parna (u 1. grupi nije ni parna ni neparna).



4. a)

Hodograf vektor funkcije je:

$$\vec{r}(t) = \left(3x, 2 \sin \frac{x}{3}, 2 \cos \frac{x}{3} \right)$$

odakle sledi da je $D_{\vec{r}} = \mathbb{R}$. Za $t = 0$ dobijamo $\vec{r}(0) = M(0, 0, 2)$. Potrebne vektore dobijamo iz:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}}(t) &= \left(3, \frac{2}{3} \cdot \cos \frac{x}{3}, -\frac{2}{3} \cdot \sin \frac{x}{3} \right) \Rightarrow \dot{\vec{r}}(0) = \left(3, \frac{2}{3}, 0 \right) \sim (9, 2, 0) = \vec{\tau} \\ \ddot{\vec{r}}(t) &= \left(0, -\frac{2}{9} \cdot \sin \frac{x}{3}, -\frac{2}{9} \cdot \cos \frac{x}{3} \right) \Rightarrow \ddot{\vec{r}}(0) = \left(0, 0, -\frac{2}{9} \right) \sim (0, 0, -1) = \vec{n} \\ \dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} \end{vmatrix} = \left(-\frac{4}{27}, \frac{2}{3}, 0 \right) = (-2, 9, 0) = \vec{b} \end{aligned}$$

Torzija je jednaka:

$$T(M) = \frac{\dot{\vec{r}}(0) \cdot (\ddot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0))}{|\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0)|^2}$$

i izračunajmo prvo:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \left(0, -\frac{2}{27} \cdot \cos \frac{x}{3}, \frac{2}{27} \cdot \sin \frac{x}{3} \right) \Rightarrow \ddot{\vec{r}}(0) = \left(0, -\frac{2}{27}, 0 \right)$$

i dobijamo:

$$\dot{\vec{r}}(0) \cdot \left(\ddot{\vec{r}}(0) \times \dddot{\vec{r}}(0) \right) = \dot{\vec{r}}(0) \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} \\ 0 & -\frac{2}{27} & 0 \end{vmatrix} = \left(3, \frac{2}{3}, 0 \right) \cdot \left(-\frac{4}{243}, 0, 0 \right) = -\frac{4}{81}$$

Izračunajmo još i:

$$| \dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) |^2 = \left(-\frac{4}{27} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + (0)^2 = \frac{340}{729}$$

Konačno je:

$$T(M) = \frac{-\frac{4}{81}}{\frac{340}{729}} = -\frac{9}{85}$$

b)

Kako je $f(x)$ složena funkcija od funkcija $h(x) = x^2$ i $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ dovoljno je razviti funkciju $g(x)$ u Maklorenov polinom 8 stepena jer je oblika:

$$(1+X)^\alpha = \sum_{i=0}^n \binom{\alpha}{i} X^i + \mathbf{R}_n$$

odakle se dobija:

$$g(x) = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x^4 + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^8 = 1 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{8} x^8$$

Konačno je:

$$f(x) \approx x^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{8} x^8 \right) \approx x^2 + \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{8} x^{10}$$

Rešenje odgovarajućeg zadatka za 2. grupu teče potpuno analogno.

prof. dr Slobodan Radojević
doc. dr Aleksandar Pejčev